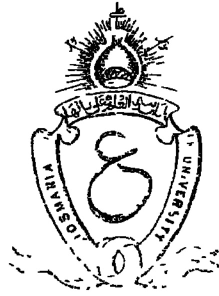


سلسلۂ نصابات علمیہ جامعہ عثمانیہ

صغاری احصاء

جلد اوّل

تصنیف

ہوریس لیمب ایم۔اے ایل ایل۔ڈی ایس۔سی۔ڈی ایف۔آر۔ایس

ترجمہ

قاضی محمد حسین ایم۔اے و کشن چند ایم۔اے

پروفیسران کلیۂ جامعہ عثمانیہ

سنہ ۱۳۴۷ھ م سنہ ۱۳۳۸ف م سنہ ۱۹۲۹ء

دار الطبع جامعہ عثمانیہ سرکار عالی حیدرآباد دکن

یہ کتاب مسرز میکملن اینڈ کمپنی کی اجازت سے جن کو
حق اشاعت حاصل ہے اُردو میں ترجمہ کرکے
طبع وشایع کی گئی ہے

۷۸۶

دیباچہ (از مصنّف)

اس کتاب کے پہلے ایڈیشن کے دیباچہ میں یہ بیان کیا گیا تھا کہ اس میں احصا کے ان حصوں کو سمجھانے کی کوشش کی گئی ہے جو زیادہ تر اس مضمون کے اطلاقات کے لحاظ سے خاص اہمیت رکھتے ہیں۔ اس وقت اس کی ترتیب کچھ غیر معمولی سی تھی لیکن معلوم ہوتا ہے کہ یہ سہولت بخش ثابت ہوئی ہے۔

اس ایڈیشن کی کامل نظرثانی کیگئی ہے اور اس میں متعدد تبدیلیاں عمل میں لائی گئی ہیں۔ علاوہ معمولی ترمیمات اور ترتیب کی تبدیلیوں کے ایک دو باتوں کا ذکر کر دینا ضروری معلوم ہوتا ہے۔

ایک خاص باب قوت نما اور اس سے متعلق تفاعلوں کے لئے وقف کر دیا گیا ہے۔ قوت نما تفاعل کی تعریف یہ کی گئی ہے کہ یہ مساوات

$$\frac{\text{فر} ما}{\text{فر} لا} = ما$$

کا معیاری حل ہے۔ اس تفاعل کی اہمیت ریاضیات میں صرف اسی خاصیت کی وجہ سے ہے اور اس لئے اس کی ابتدا اس خاصیت سے کرنا ہی واجب معلوم ہوتا ہے۔ سلسلہ قوت نما کا کوئی نظریہ جو باضابطہ کہلائے جانیکا کچھ مستحق ہو سکتا ہے بالکل ابتدائی نہیں کہا جا سکتا لیکن یہ کہنا بیجا نہوگا کہ وہ طریقہ جس کی یہاں پابندی کی گئی ہے علم احصا کے تعلق سے نظر

کسی اور طریقہ سے زیادہ مشکل نہیں اور ہر لحاظ سے قابل ترجیح بھی ہے۔
لاانتہای سلسلوں کی بحث میں خاص طور پر ان کے تفرق اور تکمل کے متعلق کئی تبدیلیاں عمل میں لائی گئی ہیں پچھلی اشاعتوں میں ان مسائل پر یکساں استمرار کے نظریہ کی مدد سے عام طریق پر بحث کی گئی تھی۔ احصائی کتاب میں اس وقت اس نظریہ کا داخل کرلینا شاید کچھ بیجا نہ تھا جبکہ کسی انگریزی مقالہ میں اس کا ملنا محال تھا لیکن کتاب کے باقی حصہ کے ساتھ موضوع کے لحاظ سے ذرا بے جوڑ ہونے کی وجہ سے اب اسکو ترک کردیا گیا ہے۔ اسکی بجائے وہ بحث داخل کی گئی ہے جو صرف قوتی سلسلوں سے متعلق ہے اور زیادہ تر اسی نمونہ کے سلسلوں سے طالب علم کو واسطہ پڑیگا جب تک کہ وہ مضموں میں زیادہ اعلیٰ مدارج تک ترقی نہ کرجائے۔
کمیت کے مرکزوں، دودرجی معیاروں، اور اسی قسم کی دیگر چیزوں میں اختصار کیا گیا ہے یا انکو ترک کردیا گیا ہے اور ان کا بیشتر حصہ مصنف کی دوسری کتابوں میں منتقل کردیا گیا ہے فقط
جون ۱۹۱۹ء

ہوریس لیمب

فہرست مضامین

دفعہ	مضمون	صفحہ
	پہلا باب	
	تسلسل	
۱	مسلسل تغیر	۱
۲	تواتر کی علوی یا سفلی انتہا	۳
۳	لامتناہی سلسلوں پر استعمال۔ مثبت رقموں والے سلسلے	۷
۴	تواتر میں انتہائی قیمت۔	۱۰
۵	لامتناہی سلسلوں پر استعمال	۱۵
۶	تفاعل کی عام تعریف	۲۰
۷	تفاعلوں کی ہندسی تعبیر	۲۲
۸	مسلسل تفاعل کی تعریف	۲۴
۹	مسلسل تفاعل کی خاصیت	۲۵
۱۰	مسلسل تفاعل کی ترسیم	۲۷
۱۱	عدم تسلسل	۲۹
۱۲	مسلسل تفاعل سے متعلق مسائل	۳۱
۱۳	جبری تفاعل۔ منطق صحیح تفاعل	۳۴
۱۴	منطق کسریں	۳۶

دوسرا باب

مشتق تفاعل

تیسرا باب

قوت نما اور لوکارثمی تفاعل

چوتھا باب

مشتق تفاعل کا استعمال

پانچواں باب
اعلیٰ رتبہ کے مشتقات

۷۸۶

پہلا باب

تسلسل

۱۔ مسلسل تغیر

صغاری احصا کے ہر مسئلہ میں ہمیں مقداروں کی ایک نہ ایک تعداد سے واسطہ پڑتا ہے، ان میں سے بعض مستقل ہو سکتی ہیں اور باقی متغیر سمجھی جاتی ہیں اور (مزید براں) مسلسل تغیر کو قبول کرتی ہیں۔

شلاً ہندسہ کے مسئلوں میں زیر بحث مقداریں طول، زاویے، رقبے، حجم وغیرہ ہو سکتی ہیں۔ حرکیات میں یہ مقداریں کمیتیں، اوقات، رفتاریں، قوتیں، وغیرہ ہو سکتی ہیں۔

جبر و مقابلہ کے ذریعہ اس قسم کی کسی مقدار کو ایک حرف سے تعبیر کرتے ہیں شلاً x یا λ جس سے وہ نسبت مفہوم ہوتی ہے جو اس مقدار کو اسی قسم کی ایک معیاری یا اکائی مقدار سے ہے۔ یہ نسبت ایک صحیح عدد ہو سکتی ہے یا ایک کسر یا ایک عدد متباین جس سے مراد یہ ہے کہ ایسے عدد کو کسی ایسی کسر سے تعبیر نہیں کر سکتے جس کا شمارکنندہ و نسب نما دونوں محدود و صحیح اعداد ہوں۔ تاہم ایسی متباین مقدار کے لئے جو حرف استعمال کیا جائے اُس پر جبر و مقابلہ کے تمام معمولی قوانین جاری ہو سکتے ہیں۔

مستقل مقدار کسی دئے ہوئے عمل میں وہ مقدار ہوتی ہے جو اپنی قیمت

نہیں بدلتی۔ ایسی مقدار جو کسی دیے ہوئے عمل کے دوران میں مختلف قیمتیں
اختیار کرتی ہے "متغیر" کہلاتی ہے۔ حروف تہجی کے ابتدائی حروف ا، ب، ج ...
کو ہم عام طور پر مستقل مقداروں کے تعبیر کرنے میں اور آخری حروف ع، و، ھ، لا، ما، ی
کو متغیر مقداروں کے تعبیر کرنے میں استعمال کریں گے۔

بعض مقداریں اس قسم کی ہیں کہ وہ علامت کے تغیر کو قبول نہیں کرتیں
مثلاً طول، کمیت، کثافت وغیرہ۔ اور بعض مثبت یا منفی دونوں ہو سکتی ہیں
مثلاً ارتفاع، گردش، رفتار وغیرہ۔ جب ہمیں دوسری جماعت کی کسی مقدار
کی مطلق قیمت سے بلا لحاظ علامت سروکار ہوتا ہے تو تعبیر کرنے والے حرف کو
ہم دو چھوٹے انتصابی خطوط کے درمیان بند کر دیتے ہیں مثلاً

|لا|، |جب لا|، لوک |لا|

یہ دیکھنا ضروری ہے کہ اگر ا اور ب ہم علامت ہوں تو

|ا + ب| = |ا| + |ب|

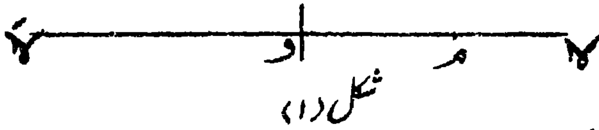
لیکن جب وہ مختلف العلامت ہوں تو

|ا + ب| < |ا| + |ب|

۲ صفاری احصا کی ابتدا ہندسہ کے مسئلوں سے ہوئی مثلاً منحنیوں کے مماس
کھینچنا، منحنیوں کے طول اور رقبے معلوم کرنا، ٹھوس اجسام کے حجم وغیرہ دریافت
کرنا۔ اس لئے یہ قدرتی بات ہے اور احصا کے اکثر استعمالوں کو پیش نظر رکھ کر
ضروری بھی ہے کہ مقدار کے ہندسی تخیل کو بنیاد کے طور پر اختیار کر لیا جائے
اور ساتھ ہی ساتھ ان جملہ عام مفروضات کو بھی مان لیا جائے جو اس تخیل میں
واضح یا مضمر طور پر شریک ہوتے ہیں۔

مقداروں کے کسی گروہ کی ہندسی تعبیر اس طرح حاصل ہو سکتی ہے۔ ایک
لا متناہی خط مستقیم لالا' لو۔ اس پر ایک ثابت مبدأ و مقرر کرو اور ایک

مختلف مقداروں کے متناسب کسی مناسب پیمانہ پر طول و م ناپے۔ علامت مقادیر (مثلاً کمیتوں) کی صورت میں ان طولوں کو و کے صرف ایک ہی جانب لینا چاہئے لیکن ایسی صورتوں میں جہاں مقادیر کی علامتیں مختلف ہوں و م کو و کے سیدھے یا بائیں جانب کھینچنا چاہئے بموجب اس کے کہ تعبیر کیجانے والی مقدار مثبت یا منفی ہو۔ اس طرح ہر قسم کی مقدار زیر بحث کے جواب میں ک ک میں ایک خاص نقطہ م ملیگا۔



شکل (۱)

جب ہم یہ کہتے ہیں کہ ایک مقدار مسلسل تغیر کو قبول کرتی ہے تو اس سے ہمارا یہ مطلب ہوتا ہے کہ نقطہ م خط ک ک میں ایک خاص وسعت (جو دیجا سکتی ہے) کے اندر کوئی محل اختیار کر سکتا ہے۔

یہ معلوم رہے کہ زیر بحث خاص قسم کی مقداروں کے لحاظ سے ہم نے دو باتوں کو اصول موضوعہ کے طور پر مان لیا ہے یعنے اس قسم کی ہر ممکن مقدار خط ک ک کے کسی نہ کسی نقطہ سے تعبیر ہوتی ہے اور (برعکس اس کے) ایک خاص وسعت کے اندر خط پر کا ہر نقطہ کسی نہ کسی مقدار کا جواب ہوتا ہے۔ یہ شرطیں مقدار کی ان تمام قسموں سے پوری ہوتی ہیں جن سے ہمیں واسطہ پڑتا ہے خواہ وہ ہندسہ سے متعلق ہوں یا ریاضی طبیعیات سے۔ امتحان کرنے سے یہ معلوم ہوگا کہ یہ تمام مقداریں بلحاظ اپنی تخصیص کے بالراست یا بالواسطہ خطی مقدار سے تعلق رکھتی ہیں۔ مثلاً رقبہ ایک متماثل مستطیل کے ارتفاع سے تعبیر ہو سکتا ہے جو ایک دیئے ہوئے (اکائی) قاعدے پر بنایا گیا ہے۔ رفتار اس طول سے تعبیر ہو سکتی ہے جو اکائی وقت میں طے ہوا اور علی ہذا القیاس۔

۲۔ تواتر کی علوی یا سفلی انتہا۔ انتہا یا انتہائی قیمت کا تخیل مختلف صورتوں میں احصا کے تمام حصوں میں رونما ہوتا ہے اور یہ بنیادی اہمیت رکھتا ہے۔ اس کی ابتدائی صورت سے جس پر اب غور کیا جائیگا طالب علم

کچھ نہ کچھ واقف ہوگا۔
فرض کرو کہ ایک ہی قسم کی مقداروں کا ایک لامتناہی صعودی تواتر

$ا_۱، ا_۲، ا_۳، ...... ا_ن، .... (۱)$

ہے۔ یعنے ہر رقم پہلے کی رقم سے بڑی ہے اس طرح کہ فرق

$ا_۲ - ا_۱، ا_۳ - ا_۲، ...... ا_ن - ا_{ن-۱}، ....$

تمام کے تمام مثبت ہیں۔ نیز فرض کرو کہ مقادیر (۱) سب کی سب کسی ثابت محدود مقدار ل سے کم ہیں۔ اس صورت میں سلسلہ کی اوپر کی یا علوی انتہا ہوگی یعنی ایک خاص مقدار م موجود ہوگی جو مقادیر (۱) میں سے ہر مقدار سے بڑی ہوگی لیکن اس طور پر کہ اگر ہم سلسلہ میں کافی دور تک بڑھ جائیں تو اس کے رکن آخرکار کسی ایسی مقررہ مقدار سے جو م سے کم ہے تجاوز ہوں گے۔ بالفاظ دیگر سلسلہ کے ارکین اور مقدار م کے درمیان روک قائم کرنا ممکن ہے۔
ہندسی تعبیر میں مقادیر (۱) نقاط کے ایک تواتر

$م_۱، م_۲، م_۳، .... (۲)$

سے تعبیر ہوتی ہیں جن میں سے ہر ایک اپنے ماقبل سے دائیں طرف ہے لیکن تمام

شکل (۱)

ایک ثابت نقطہ ا کے بائیں طرف ہیں۔ اس خط لا لا پر کا ہر نقطہ بغیر استثنا کے دو جماعتوں میں سے کسی ایک سے متعلق ہوگا اور یہ جماعتیں ایک دوسرے سے بالکل الگ ہیں۔ یا تو تواتر (۲) کے نقطے اس کے دائیں جانب واقع ہوتے ہیں یا نہیں ہوتے۔ مزید برآں اول الذکر جماعت کا ہر نقطہ موخرالذکر جماعت

کے ہر نقطہ کے بائیں جانب واقع ہوتا ہے۔ پس کوئی نقطہ م ضرور ہونا چاہئے ایسا کہ م کے بائیں جانب کے تمام نقطے اول الذکر جماعت سے متعلق ہوں اور اس کے دائیں طرف کے نقطے موخرالذکر جماعت سے۔ پس اگر ہم مس = و م کہیں تو مس متذکرہ بالا 'علوی انتہا' کی تعریف کو پورا کرتا ہے۔

اسی طرح اگر مقداروں کا ایک لامتناہی نزولی تواتر

$$\text{لا}_1 ، \text{لا}_2 ، \text{لا}_3 ، \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۳)$$

ہو یعنے ہر مقدار اپنی پہلی مقدار سے کم ہو اس طور پر کہ فرق

$$\text{لا}_1 - \text{لا}_2 ، \text{لا}_2 - \text{لا}_3 ، \ldots\ldots ، \text{لا}_{\text{ن}-1} - \text{لا}_{\text{ن}}$$

تمام مثبت ہوں اور تمام مقداریں کسی محدود مقدار ب سے متجاوز ہوں تو ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ ایک سفلی انتہا ننا کا وجود ہوگا اس طرح کہ تواتر کی ہر مقدار ننا سے بڑی ہوگی مگر تواتر کے ارکان کسی مقررہ مقدار سے جو ننا سے بڑی ہے آخر الامر کم ہو جائینگے۔

استدلال بالا صریحاً اسوقت بھی درست رہتا ہے جبکہ تواتر کی دو یا دو سے زیادہ متصل مقداریں مساوی ہوں۔ اس صورت میں بھی تواتروں کو علی الترتیب صعودی یا نزولی کہا جا سکتا ہے اگرچہ 'نہ گھٹنے والا' یا 'نہ بڑھنے والا' کہنا زیادہ صحیح ہوگا۔

نوٹ: حال میں انگریزی اصطلاح (Monotonic) وضع ہوئی ہے جسمیں دونوں طرح کے تواتر شامل ہوتے ہیں ان تواتروں کو یکرنگ کہا جا سکتا ہے۔

مثال ۱ - تواتر

$$\frac{1}{2} ، \frac{2}{3} ، \frac{3}{4} ، \ldots\ldots ، \frac{\text{ن}}{\text{ن}+1} ، \ldots\ldots \quad (۴)$$

صعودی ہے اور اس کی علوی انتہا ۱ ہے۔ کیونکہ

$$\frac{\text{ن}}{\text{ن}+1} = 1 - \frac{1}{\text{ن}+1}$$

ن کو کافی بڑا لینے سے اس کو ۱ کے اتنا قریب لایا جا سکتا ہے جتنا ہم چاہیں۔

مثال ۲۔ اگر لا ایک مثبت مقدار ایک سے کم ہو تو مقادیر

$$\text{۱}،\ \text{لا}،\ \text{لا}^{\text{۲}}،\ \ldots\ldots،\ \text{لا}^{\text{ن}}،\ \ldots\ldots\ldots \quad (\text{۵})$$

ایک نزولی تواتر بناتی ہیں جس کی سفلی انتہا صفر ہے۔ کیونکہ $\frac{\text{۱}}{\text{لا}}$ ایک سے بڑا ہے اسلئے ہم لکھ سکتے ہیں

$$\frac{\text{۱}}{\text{لا}} = \text{۱} + \text{ما}$$

جہاں ما مثبت ہے۔ تب مسئلہ ثنائی سے

$$\left(\frac{\text{۱}}{\text{لا}}\right)^{\text{ن}} = (\text{۱} + \text{ما})^{\text{ن}} = \text{۱} + \text{ن ما} + \ldots\ldots + \text{ما}^{\text{ن}}$$

پس

$$\frac{\text{۱}}{\text{لا}^{\text{ن}}} > \text{۱} + \text{ن ما}$$

اور اس لئے ن کو کافی بڑا لینے سے اسے اتنا بڑا بنایا جا سکتا ہے جتنا ہم چاہیں۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ $\text{لا}^{\text{ن}}$ اتنا چھوٹا بنایا جا سکتا ہے جتنا ہم چاہیں۔

مثال ۳۔ ایسے تواتر پر غور کرو جس میں

$$\text{لا}_{\text{۱}} = \text{۱}،\ \text{لا}_{\text{ن+۱}} = \sqrt{(\text{۱} + \text{لا}_{\text{ن}})} \ \ldots\ldots\ldots \quad (\text{۶})$$

چونکہ

$$\text{لا}^{\text{۲}}_{\text{ن+۱}} - \text{لا}^{\text{۲}}_{\text{ن}} = \text{لا}_{\text{ن}} - \text{لا}_{\text{ن-۱}} \ \ldots\ldots\ldots \quad (\text{۷})$$

اس لئے

$\text{لا}_{\text{ن+۱}}$، $\text{لا}_{\text{ن}}$ سے بڑا ہوگا اگر $\text{لا}_{\text{ن}}$، $\text{لا}_{\text{ن-۱}}$ سے بڑا ہے۔ لیکن $\text{لا}_{\text{۲}}$ صریحاً $\text{لا}_{\text{۱}}$ سے بڑا ہے۔ اس لئے تواتر صعودی ہے۔ پھر

$$لا_{ن+۱} = \frac{۱ + لا_ن}{لا_{ن+۱}} < \frac{۱ + لا_{ن+۱}}{لا_{ن+۱}} < ۱ + \frac{۱}{لا_{ن+۱}} \ldots\ldots (۸)$$

اور چونکہ $لا_{ن+۱} > ۱$ اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ن کی تمام قیمتوں کے لئے $لا_{ن+۱} < ۲$ اس لئے تواتر کی ایک علوی انتہا ہے۔ اس کو ﻣﮧ سے تعبیر کریں تو (۶) سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ ﻣﮧ مساوات

$$لا^۲ = لا + ۱ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (۹)$$

کی مثبت اصل ہے۔

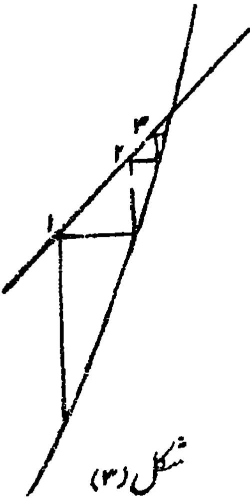
(۶) سے عملی طور پر محسوب کرنے سے سلسلہ کے پہلے چند ارکان چار ہندسوں تک

۱، ۱٫۴۱۴، ۱٫۵۵۴، ۱٫۵۹۸، ۱٫۶۱۲، ۱٫۶۱۸

حاصل ہوتے ہیں۔ آخر میں لکھا ہوا عدد مطلوبہ تقرب کے درجہ تک ﻣﮧ کی صحیح قیمت ہے۔

$$ﺣﺎ = لا + ۱، \quad ﺣﺎ = لا^۲ \ldots\ldots\ldots (۱۰)$$

کی ترسیمات سے اس سوال کو ترسیمی طور پر تعبیر کیا جا سکتا ہے شکل سے ظاہر ہے کہ (۶) سے حاصل شدہ $لا_ن$ کی متواتر قیمتیں کس طرح نقطۂ تقاطع پر لا کی قیمت کی طرف مستدق ہوتی ہیں۔ ترسیم کا صرف ایک حصہ دکھایا گیا ہے۔ صریحاً ہم اسی نتیجہ پر پہنچینگے اگر ۱ کے بجائے لا کی کسی مثبت قیمت سے ہم ابتدا کریں۔ اگر $لا_۱$، (۹) کی مثبت اصل سے بڑا ہو تو صرف اس صورت میں تواتر نزولی ہوگا طریقہ بالا کا استعمال مساواتوں کے عددی حل دریافت کرنے میں بہت وسیع ہے خواہ مساواتیں جبری ہوں یا ماورائی۔



شکل (۳)

۳۔ لامتناہی سلسلوں پر استعمال۔ مثبت رقموں والے سلسلے

متذکرہ بالا مسئلہ احصا کا بنیادی مسئلہ کہلاتا ہے۔ لامتناہی سلسلوں کے نظریہ سے جنکی تمام رقمیں ہم علامت ہوں اسکی اچھی توضیح ہوتی ہے۔ درحقیقت لامتناہی سلسلے کی ارقام کا مجموعہ بے معنی چیز ہے کیونکہ جن اعمال پر یہ مشتمل ہے وہ کبھی پورے نہیں ہوسکتے۔ لیکن ایک خاص شرط کے تحت ایک مخصوص مقدار کی تعریف ایک سلسلے سے ہوسکتی ہے۔

سلسلہ

$$\text{ع}_1 + \text{ع}_2 + \text{ع}_3 + \cdots + \text{ع}_{\text{ن}} + \cdots \quad (1)$$

پر غور کرو جس کی تمام ارقام مثبت ہیں اور فرض کرو کہ

$$\text{س}_1 = \text{ع}_1,\ \text{س}_2 = \text{ع}_1 + \text{ع}_2,\ \ldots,\ \text{س}_{\text{ن}} = \text{ع}_1 + \text{ع}_2 + \cdots + \text{ع}_{\text{ن}}, \ldots \quad (2)$$

ان مقداروں کو ہم "جزوی مجموعے" کہینگے۔ اگر تواتر

$$\text{س}_1,\ \text{س}_2,\ \ldots,\ \text{س}_{\text{ن}},\ \ldots \quad (3)$$

کی علوی انتہا س ہو تو سلسلہ (۱) کو "مستدق" کہتے ہیں۔ اور مقدار س کو عام طور پر اس سلسلہ کا مجموعہ کہا جاتا ہے۔

پھر اگر (۱) مثبت ارقام کا ایک ایسا سلسلہ ہو جس کا مستدق ہونا معلوم ہے اور اگر

$$\text{ع}'_1 + \text{ع}'_2 + \text{ع}'_3 + \cdots + \text{ع}'_{\text{ن}} + \cdots \quad (4)$$

مثبت ارقام کا ایک دوسرا سلسلہ ہو جس کی ارقام سلسلہ (۱) کی متناظر ارقام سے چھوٹی ہیں یعنے $\text{ع}'_{\text{ن}} < \text{ع}_{\text{ن}}$ ، ن کی تمام قیمتوں کے لئے تو (۴) بھی مستدق ہوگا۔ کیونکہ اگر $\text{س}'_{\text{ن}}$ ، (۴) کی پہلی ن رقموں کا مجموعہ ہو تو $\text{س}'_{\text{ن}} < \text{س}_{\text{ن}}$ اور بموجب فرض چونکہ مقادیر $\text{س}_{\text{ن}}$ کی علوی انتہا ہے اس لئے مقادیر $\text{س}'_{\text{ن}}$ کی بھی ایک علوی انتہا ہوگی۔

مثال ۱ سلسلہ

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\cdots\cdots$$

مجموعہ ۲ کی طرف مستدق ہوتا ہے۔ کیونکہ اگر شکل ۲ (صفحہ ۴) میں ہم و م۱ = ۱، و ا = ۲ لیں اور م۱ ا کو م۲ پر، م۲ ا کو م۳ پر اور علیٰ ہذا القیاس تنصیف کریں تو نقاط م۱، م۲، م۳، .... مقادیر س۱، س۲، س۳، .... کو تعبیر کرینگے۔ اور چونکہ یہ تمام نقطے ا کے بائیں جانب واقع ہوتے ہیں کیونکہ م‌ن ا = ۱/۲^(ن-۱) اور اس لئے اسقدر چھوٹا بنایا جا سکتا ہے جتنا ہم چاہیں اس لئے یہ معلوم ہوتا ہے کہ سلسلہ کی علوی انتہا و ا = ۲ ہے۔
کسی ہندسی سلسلہ کی صورت کو جس کی نسبت مشترک مثبت اور ایک سے کم ہو اسی طرح تعبیر کر سکتے ہیں۔

مثال ۲۔ سلسلہ

$$\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots\cdots + \frac{1}{ن(ن+1)} + \cdots\cdots$$

پر غور کرو۔ اگر اس کو شکل

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots\cdots + \left(\frac{1}{ن} - \frac{1}{ن+1}\right) + \cdots\cdots$$

میں لکھا جائے تو ہم دیکھتے ہیں کہ

$$س_{ن} = 1 - \frac{1}{ن+1}$$

جس کی علوی انتہا ۱ ہے۔

مثال ۳۔ مزید مثالیں ہر ایسے حسابی عمل سے حاصل ہو سکتی ہیں جس میں نہ ختم ہونے والے اعشاریہ کے ہند سے متواتر حاصل ہوتے جاتے ہیں۔ مثلاً ۲ کا جذر المربع نکالنے کے معمولی عمل سے سلسلہ

$$1.414213\ldots\ldots$$

یا

$$1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \frac{1}{10^5} + \frac{3}{10^6} + \cdots\cdots\cdots$$

حاصل ہوتا ہے۔ اب چونکہ سن ہمیشہ ۲/۵ سے چھوٹا رہتا ہے اس لئے اس صورت میں علوی انتہا کا وجود ہے۔

مثال ۴۔ سلسلہ

$$1+1+\frac{1}{\underline{2}}+\frac{1}{\underline{3}}+\cdots+\frac{1}{\underline{n}}+\cdots$$

کی ارقام (پہلی تین رقموں کے بعد) علی الترتیب سلسلہ

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots$$

کی ارقام سے چھوٹی ہیں۔ موخرالذکر سلسلہ متدق ہے اور اس کا مجموعہ ۳ ہے۔ اس لئے اول الذکر سلسلہ بھی متدق ہے اور اس کا مجموعہ ۳ سے کم ہے۔

۴۔ تواتر میں انتہائی قیمت

فرض کرو کہ مقادیر

ل۱، ل۲، ل۳، ......، لن، ....(۱)

کا ایک لامتناہی تواتر خاص ترتیب میں لکھا گیا ہے۔ نیز فرض کرو کہ خواہ ہم کوئی بھی مقدار صہ کتنی ہی چھوٹی منتخب کریں سلسلہ میں ہمیشہ ایک ایسا نقطہ مل سکتا ہے جس کے بعد سلسلہ کا ہر رکن کسی معین مقدار مہ سے اسقدر فرق رکھتا ہے جو مطلق قیمت میں صہ سے کم ہے۔ ایسی صورت میں ہم کہتے ہیں کہ سلسلہ متدق ہے اور اس کی انتہائی قیمت مہ ہے۔ مضمون زیر بحث میں اس قسم کے بیانات اسقدر کثرت سے واقع ہوتے ہیں کہ ان کے لئے ایک مختصر جملہ لکھ لینا بہت آسانی پیدا کر دیتا ہے۔ ہم لکھتے ہیں

نہا (ن ← ∞) لن = مہ ....(۲)

ربط بالا کی خاص صورتیں دفعہ (۲) میں علوی اور سفلی انتہاؤں کی بحث میں ہماری نظر سے گذری ہیں لیکن موجودہ صحیح تعریف میں یہ مفہوم داخل نہیں ہے کہ

سلسلہ کے ارکان مقدار کے لحاظ سے ترتیب دئے گئے ہیں یا یہ کہ وہ تمام انتہائی
قیمت م سے بڑے یا چھوٹے ہیں۔
مفروضہ یہ ہے کہ ن کی ایک قیمت معلوم کیجا سکتی ہے اس طرح پر کہ $لا_{ن}$
کے بعد آنے والے سلسلہ کے ارکان یعنی

$$لا_{ن+۱}،\ لا_{ن+۲}،\ لا_{ن+۳}،\ \ldots\ldots$$

سب کے سب قیمتوں م - صہ اور م + صہ کے درمیان واقع ہوتے
ہیں۔ ن کی یہ قیمت جس کی بنا پر شرط مذکورہ بالا کا پورا ہونا ضروری ہے بڑی
ہوگی جتنا صہ چھوٹا ہوگا لیکن یہ مفہوم اس مفروضہ کے اندر شامل ہے کہ خواہ
صہ کتنا ہی چھوٹا لیا جائے اس طرح کی قیمت کا وجود ہوگا۔
مثال ۱۔ تواتر

$$\frac{۱}{۲}،\ \frac{۳}{۲}،\ \frac{۲}{۳}،\ \frac{۴}{۳}،\ \ldots،\ ۱-\frac{۱}{ن}،\ ۱+\frac{۱}{ن}،\ \ldots\ldots \quad (۳)$$

میں انتہائی قیمت صریحاً ۱ ہے۔
مثال ۲۔ تواتر

$$جب\,لا،\ \frac{جب\,۲لا}{۲}،\ \frac{جب\,۳لا}{۳}،\ \ldots\ldots\ \frac{جب\,ن\,لا}{ن}،\ \ldots \quad (۴)$$

میں شمار کنندہ ہمیشہ ±۱ کے درمیان واقع ہوتا ہے اور نسب نما لاانتہا بڑھتا ہے اسلئے
سلسلہ میں انتہائی قیمت صفر ہے۔
بعض صورتوں میں یہ دیکھنا ممکن ہے جیسا اوپر کی مثالوں میں کہ ایک دئے ہوئے
تواتر کی ایک معلوم مقدار انتہا ہے اور اس لئے تواتر مستدق ہے۔ لیکن حل طلب سوال
عام طور پر اسقدر آسان نہیں ہوتا اور اس لئے ایک ایسی جانچ یا پرکھ کی ضرورت پڑتی ہے
جس سے ہم یہ معلوم کرسکیں کہ دئے ہوئے تواتر کی انتہائی قیمت ہے یا نہیں۔ درحقیقت
بہت سی مقادیر ریاضی ایسی ہیں جن کا تعین محض انتہا کی صورت میں ہوسکتا ہے اسلئے
ہم کو ایسی صورت میں اس امر کا اطمینان ضروری ہے کہ انتہا موجود ہے۔

۸

سب سے پہلے یہ واضح ہے کہ اگر تواتر (ا) کی انتہا ہے تو ن کی ایک قیمت ہمیشہ معلوم کیجا سکتی ہے اس طرح پر کہ سلسلہ کے ارکان جو $لا_{ن}$ کے بعد آتے ہیں یعنے

$لا_{ن+1}$، $لا_{ن+2}$، $لا_{ن+3}$، ....، $لا_{ن+ب}$، .... $لا_{ن}$ سے اسقدر فرق رکھتے ہیں جو صہ سے متجاوز نہیں ہوتا جہاں صہ کوئی اختیاری مقدار ہے خواہ وہ کتنی ہی چھوٹی ہو۔ برعکس اس کے اگر یہ شرط پوری ہو تو سلسلہ کی ایک معین انتہا ہوتی ہے۔

اس کو ثابت کرنیکے لئے پہلے ہم ایک ایسا نزولی تواتر بناتے ہیں جو مثبت مقادیر $صہ_{1}$، $صہ_{2}$، .... پر مشتمل ہے اور جس کی انتہا صفر ہے۔ اس قسم کا تواتر بنایا جا سکتا ہے مثلاً ہر رکن کو اپنے پہلے رکن کا نصف لینے سے۔ بموجب فرض ایک عدد $ن_{1}$ معلوم کیا جا سکتا ہے ایسا کہ سلسلہ کے تمام ارکان جو $لا_{ن_1}$ کے بعد آتے ہیں قیمتوں

$$عہ_{1} = لا_{ن_1} - صہ_{1} \quad اور \quad بہ_{1} = لا_{ن_1} + صہ_{1}$$

کے درمیان واقع ہوتے ہیں اسی طرح ایک عدد $ن_{2}$ ($> ن_{1}$) معلوم کیا جا سکتا ہے ایسا کہ تمام ارکان جو $لا_{ن_2}$ کے بعد آتے ہیں $عہ_{2} = لا_{ن_2} - صہ_{2}$ اور $بہ_{2} = لا_{ن_2} + صہ_{2}$ کے درمیان واقع ہوتے ہیں۔ پس $لا_{ن_2}$ کے بعد آنیوالے تمام ارکان ایک خاص وقفہ میں واقع ہوتے ہیں جس کی وسعت (فرض کرو) $عہ_{2}$ سے $بہ_{2}$ تک ہے اور یہ $عہ_{1}$ سے $بہ_{1}$ والے وقفہ کے اندر شامل ہے اور اس طرح کا ہے کہ

$$بہ_{2} - عہ_{2} < 2\, صہ_{2}$$

اور علیٰ ہذا القیاس ـ مقادیر $عہ_{1}$، $عہ_{2}$، $عہ_{3}$ .... ایک صعودی تواتر بناتی ہیں اور چونکہ وہ تمام $بہ_{1}$ سے کم ہیں اس لئے ان کی ایک علوی انتہا (فرض کرو)

مہ ہے۔ اسی طرح مقادیر بہ۱، بہ۲، بہ۳، ایک نزولی تواتر بناتی ہیں جنکی سفلی انتہا نہ ہے۔ نیز چونکہ

نہ - مہ < بپ - عپ < ۲صپ

جو اتنا چھوٹا ہوسکتا ہے جتنا ہم چاہیں، اس لئے انتہائیں مہ اور نہ مختلف نہیں ہوسکتیں۔ متذکرہ بالا شرط کے ماتحت مہ اور نہ کی مشترک قیمت تواتر (۱) کی انتہا ہے۔

مثال ۳ - کسی حسابی عمل سے ایسی مثال ملسکتی ہے جس میں ایک نتیجہ متواتر تقربات کے ذریعہ حاصل کیا جاتا ہے جبکہ تقربات حسب معمول طریقہ سے مرتب کئے جائیں یعنی آخری نمایاں ہندسہ میں اکائی کا اضافہ کردیا جائے جب کبھی اس کے بعد آنیوالا ہندسہ ۵ یا ۵ سے زیادہ ہو۔ مثلاً ۷ کا جذر المربع معلوم کرنے کے عمل سے

۲٫۶۴۵۷۵۱۳.....

حاصل ہوتا ہے۔ متواتر تقریب جو طریقہ متذکرہ بالا کے موافق مرتب کئے گئے ہیں

۲، ۲٫۶، ۲٫۶۵، ۲٫۶۴۶، ۲٫۶۴۵۸، ۲٫۶۴۵۷۵،

۲٫۶۴۵۷۵۱....

ہیں جن سے زیر بحث قسم کا ایک تواتر حاصل ہوتا ہے۔ جو عدد پہلے عدد کے بعد آتے ہیں اس جذر سے ۰٫۵ سے کم فرق رکھتے ہیں۔ دوسرے عدد کے بعد آنے والے اعداد اس سے ۰٫۰۵ سے کم فرق رکھتے ہیں۔ تیسرے عدد کے بعد آنے والے اس سے ۰٫۰۰۵ سے کم فرق رکھتے ہیں اور علیٰ ہذا القیاس۔ اس لئے تواتر کی ایک خاص انتہا ہے۔

مثال ۴ - ایسے سلسلہ پر غور کرو جس میں

لا۱ = ۱، لان+۱ = ۱/(۱ + لان) .... (۵)

تمام ارکان مثبت ہیں اور (پہلے رکن کے بعد) ۱ سے کم ہیں نیز یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ تمام ارکان دوسرے رکن کے بعد ½ سے بڑے ہیں۔ پھر

$$\text{لا}_{ن+۲} - \text{لا}_{ن+۱} = \frac{۱}{۱+\text{لا}_{ن+۱}} - \frac{۱}{۱+\text{لا}_{ن}}$$

یا

$$\frac{\text{لا}_{ن+۲} - \text{لا}_{ن+۱}}{\text{لا}_{ن} - \text{لا}_{ن+۱}} = \frac{۱}{(۱+\text{لا}_{ن})(۱+\text{لا}_{ن+۱})} \quad \ldots\ldots (۶)$$

اس لئے تواتر کا ہر رکن اپنے پہلے رکن سے باری باری سے بڑا اور چھوٹا ہے۔

مزید براں چونکہ نسبت بالا $\frac{۴}{۹}$ سے کم ہے جبکہ ن > ۱ اس لئے متواتر ارکان کے درمیانی وقفے لاانتہا گھٹتے ہیں۔ اس لئے یہ نتیجہ بہ آسانی حاصل ہوتا ہے کہ تواتر ایک خاص انتہا کی طرف مستدق ہونا چاہئے جو صریحاً

$$\text{لا}^۲ + \text{لا} = ۱ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۷)$$

کی مثبت اصل ہے

(۵) سے فی الحقیقت محسوب کرنے سے ہم

۱، ۵ء، ۶۶۶۷ء، ۶ء، ۶۲۵ء، ۶۱۵۴ء، ۶۱۹۰ء، ۶۱۷۶ء، ۶۱۸۲ء

حاصل کرتے ہیں۔ آخری عدد زیر بحث اصل کی چار ہندسوں تک صحیح قیمت ہے۔

تواتر کی نوعیت ترسیمی طور پر

$$\text{ما} = \text{لا} \,،\; \text{ما} = \frac{۱}{۱+\text{لا}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۸)$$

کی ترسیموں سے اس طرح واضح کیا جا سکتی ہے۔

شکل (۴)

شکل میں ترسیم کا ضروری حصہ دکھایا گیا ہے ۔
اس مثال میں اور دفعہ (۲) کی مثال (۳) میں تقرب کے ایسے طریقہ کی ہم نے سادہ مثالیں دی ہیں جو دو منحنیوں کے تقاطع سے متعلق ہیں ۔ یہ طریقہ اکثر مفید ثابت ہوتا ہے ۔ استدقاق بطی ہوگا اگر منحنیوں کے میلان محور لا کے ساتھ (ایک ہی یا مخالف سمتوں میں) تقریباً ہی ہوں ۔

۵ ۔ لامتناہی سلسلوں میں استعمال ۔

اگر لامتناہی سلسلہ

$$ع_۱ + ع_۲ + \dots + ع_ن + \dots \quad (۱)$$

میں جبکی ارقام کا ہم علامت ہونا مشروط نہیں ہے ہم

$$س_۱ = ع_۱ ، س_۲ = ع_۱ + ع_۲ ، \dots ، س_ن = ع_۱ + ع_۲ + ع_۳ + \dots ع_ن$$

$$\dots \quad (۲)$$

لکھیں اور اگر تواتر

$$س_۱ ، س_۲ ، س_۳ ، \dots س_ن ، \dots \quad (۳)$$

کی انتہائی قیمت س ہو تو سلسلہ کو "مستدق" کہا جاتا ہے اور س کو اس کا مجموعہ کہتے ہیں ۔
دفعہ (۴) سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ (۱) کے استدقاق کے لئے ضروری اور کافی شرط یہ ہے کہ ایک عدد ن کا معلوم کرنا ممکن ہو اس طرح کہ جزوی مجموعے $س_{ن+۱} ، س_{ن+۲} ، \dots س_{ن+پ} \dots$ تمام $س_ن$ سے اسقدر فرق رکھیں جو صہ سے کم ہو جہاں صہ کوئی اختیاری مقدار ہے خواہ وہ کتنی ہی چھوٹی ہو ۔
موجودہ بحث سے متعلق ایک اہم مسئلہ یہ ہے کہ اگر سلسلہ

$$|ع_۱| + |ع_۲| + \dots + |ع_ن| + \dots \quad (۴)$$

جو سلسلہ (۱) کی مختلف ارقام کی مطلق قیمتیں لینے سے بنایا گیا ہے مستدق ہو تو سلسلہ (۱) بھی مستدق ہوگا۔

کیونکہ اگر (۴) مستدق ہو تو سلسلہ (۱) کی مثبت ارقام بدرجہ اولی ایک مستدق سلسلہ بناتی ہیں اور اسی طرح منفی ارقام بھی۔ فرض کرو کہ مثبت ارقام کا مجموعہ پ اور منفی ارقام کا ـ ق ہے۔ نیز فرض کرو کہ (۱) کی پہلی م + ن ارقام کا مجموعہ $س_{م+ن}$ ہے جس میں م مثبت ارقام ہیں جنکا مجموعہ $پ_م$ اور ن منفی ارقام ہیں جن کا مجموعہ ـ $ق_ن$ ہے۔ تب

$$(پ - ق) - س_{م+ن} = (پ - ق) - (پ_م - ق_ن)$$

$$= (پ - پ_م) - (ق - ق_ن) \quad \dots (۵)$$

اگر م + ن خاطر خواہ بڑا ہو تو $پ - پ_م$ اور $ق - ق_ن$ دونو صہ سے کم ہوں گے۔ جہاں صہ کوئی اختیاری مقدار ہے خواہ وہ کتنی ہی چھوٹی ہو۔ اس لئے ان مثبت مقداروں کا فرق بدرجہ اولی مطلق قیمت میں ۲صہ سے کم ہوگا۔

پس $س_{م+ن}$ کی انتہائی قیمت پ - ق ہے۔

جب سلسلہ (۴) جو سلسلہ (۱) کی مختلف ارقام کی مطلق قیمتوں پر مشتمل ہے مستدق ہو تو سلسلہ (۱) 'مطلقاً' یا 'لازماً' یا 'غیر مشروطاً' مستدق کہلاتا ہے۔

لیکن ممکن ہے کہ ایک سلسلہ مستدق ہو جبکہ اس کی ارقام کی مطلق قیمتوں سے بنے ہوئے سلسلہ کی علوی انتہا نہ ہو۔ اس صورت میں دئے ہوئے سلسلہ کے استدقاق کو ہم اتفاقی یا مشروط استدقاق کہینگے۔

حسب ذیل مفید مسئلہ صادق آتا ہے خواہ زیر بحث سلسلہ لازماً یا صرف محض اتفاقاً مستدق ہو۔

اگر ایک سلسلہ کی ارقام باری باری سے مثبت اور منفی ہوں اور بلحاظ مطلق قیمت کے مسلسل گھٹتی جائیں اور بعد ازاں آخر کار صفر انتہا کی طرف مائل ہوں تو سلسلہ متدق ہوتا ہے اور اس کا مجموعہ ارقام کی کسی محدود طاق تعداد کے مجموعے اور کسی محدود جفت تعداد کے مجموعے کے درمیان واقع ہوتا ہے جبکہ ہر دو صورت میں ارقام کی تعداد ابتدا سے شمار کیجائے۔

طالب علم اس کے ثبوت سے واقف ہوگا لیکن چونکہ یہ مسلمہ کے استدلال کی ایک عمدہ مثال ہے اسکو یہاں دہرایا جاتا ہے۔

فرض کرو کہ سلسلہ

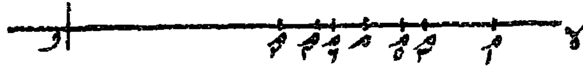
$$\text{ع}_1 - \text{ع}_2 + \text{ع}_3 - \text{ع}_4 + \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

ہے جس میں بموجب فرض

$$\text{ع}_1 > \text{ع}_2 > \text{ع}_3 > \ldots\ldots\ldots$$

شکل میں فرض کرو کہ

$$\text{و م}_1 = \text{ع}_1\text{، م}_1\text{م}_2 = \text{ع}_2\text{، م}_2\text{م}_3 = \text{ع}_3\text{، م}_3\text{م}_4 = \text{ع}_4 \ldots$$



شکل (۵)

یہ ظاہر ہے کہ نقاط م۱، م۳، م۵ ۔۔۔۔ ایک نزولی تواتر بناتے ہیں اور نقاط م۲، م۴، م۶ ۔۔۔۔ ایک صعودی تواتر۔ نیز پہلے سلسلہ کا ہر نقطہ دوسرے سلسلہ کے ہر نقطہ کے دائیں جانب ہے پس ہر تواتر کا ایک انتہائی نقطہ موجود ہوتا ہے اور چونکہ

$$\text{م}_{2\text{ن}}\,\text{م}_{2\text{ن}+1} = \text{ع}_{2\text{ن}+1}$$

اور اس لئے آخر کار کسی اختیاری مقدار سے کم ہے، یہ دونو انتہائی نقطے آخر کار ایک نقطہ م (فرض کرو) پر منطبق ہونے چاہئیں۔ تب و م دئے ہوئے سلسلہ (۶) کے مجموعہ کو تعبیر کرتا ہے۔

مثال - سلسلہ

$$۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \cdots\cdots\cdots$$

۱ اور ۱ - $\frac{۱}{۲}$ کے درمیان ایک انتہا کی طرف مستدق ہوتا ہے۔

یہ سلسلہ اتفاقاً مستدق جماعت سے متعلق ہے۔ آئندہ یہ تبلایا جائیگا (دفعہ ۱۰۵) کہ سلسلہ

$$۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \cdots\cdots\cdots$$

ن کو کافی بڑھ لینے سے اسقدر بڑا بنایا جا سکتا ہے جسقدر ہم چاہیں۔

یہ اچھی طرح ذہن نشین رہے کہ لامتناہی سلسلوں سے متعلق جو لفظ مجموعہ ہم نے استعمال کیا ہے وہ بالکل وضعی حیثیت رکھتا ہے اور یہ کہ ہم اس معاملہ میں آزاد نہیں ہیں کہ بغیر جانچ کے اس طرح کے سلسلہ کو اس طور پر استعمال کریں جیسے ایک جملہ کو استعمال کیا جاتا ہے جو ارقام کی محدود تعداد پر مشتمل ہو۔ مثلاً ہمیں یہ نہیں مان لینا چاہئے کہ رقموں کی ترتیب کو بدل دینے سے مجموعہ نہیں بدلتا۔ مطلقاً مستدق سلسلہ کی صورت میں یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ یہ مفروضہ جائز ہے لیکن اتفاقاً مستدق سلسلہ میں ارقام کی ترتیب کو بدل کر ان کو کسی دوسری مناسب ترتیب میں رکھنے سے سلسلہ کو ہم جس انتہا کی طرف مستدق کرنا چاہیں کر سکتے ہیں۔ ان مسئلوں کے ثبوت جبر و مقابلہ کی کتابوں میں مل سکتے ہیں۔ اس کتاب میں لکھنے کی چنداں ضرورت نہیں۔ ۱۲

بہرکیف حسب ذیل سادہ مسائل کا اکثر حوالہ دیا جائیگا۔

۱ - اگر $ع_۱ + ع_۲ + ع_۳ + \cdots\cdots + ع_ن + \cdots\cdots$ (۷)

ایک مستدق سلسلہ ہو جس کا مجموعہ س ہے تو سلسلہ

$$ا ع_۱ + ا ع_۲ + ا ع_۳ + \cdots\cdots + ا ع_ن + \cdots\cdots \quad (۸)$$

جو (۷) کی ارقام کو جزو ضربی ا سے ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے

مجموعہ $س$ کی طرف مستدق ہوگا۔ اس کا ثبوت ظاہر ہے۔

۲۔ اگر $ع_1 + ع_2 + \dots + ع_ن + \dots$ .... (۹)

اور $عَ_1 + عَ_2 + \dots + عَ_ن + \dots$ .... (۱۰)

مستدق سلسلے ہوں جن کے مجموعے علی الترتیب $س$ اور $سَ$ ہیں تو سلسلہ

$(ع_1 \pm عَ_1) + (ع_2 \pm عَ_2) + \dots + (ع_ن \pm عَ_ن) + \dots$ ..... (۱۱)

جو (۹) اور (۱۰) کی متناظر ارقام کے مجموعوں یا فرقوں پر مشتمل ہے مجموعہ $س \pm سَ$ کی طرف مستدق ہوگا کیونکہ اگر $س_ن$، $سَ_ن$، علی الترتیب (۹) اور (۱۰) کی پہلی ن رقموں کے مجموعے ہوں تو (۱۱) کی پہلی ن رقموں کا مجموعہ $س_ن \pm سَ_ن$ ہوگا۔ اب

$$(س \pm سَ) - (س_ن \pm سَ_ن) = (س - س_ن) \pm (سَ - سَ_ن) \quad \dots\dots (۱۲)$$

بموجب فرض اگر صہ کوئی اختیاری مقدار کتنی ہی چھوٹی ہو ہم ن کی ایک قیمت معلوم کر سکتے ہیں ایسی کہ اس قیمت اور اس سے اعلیٰ قیمتوں کیلئے

$$|س - س_ن| < \tfrac{1}{2}صہ \text{ اور } |سَ - سَ_ن| < \tfrac{1}{2}صہ \quad \dots\dots (۱۳)$$

اور اسلئے $|(س \pm سَ) - (س_ن \pm سَ_ن)| < صہ$ ..... (۱۴)

جو اس بات کی شرط ہے کہ $س_ن \pm سَ_ن$ کی انتہائی قیمت $س \pm سَ$ ہو جائے۔

۳۔ اسی مفروضہ سے سلسلہ

$(ا ع_1 + ب عَ_1) + (ا ع_2 + ب عَ_2) + \dots + (ا ع_ن + ب عَ_ن) + \dots$ ...... (۱۵)

مجموعہ ا د ن + ب د ن کی طرف مستدق ہوگا۔ پچھلے دو مسئلوں سے یہ فوراً اخذ ہو سکتا ہے۔

۴۔ تفاعل کی عام تعریف

ایک متغیر مقدار کو دوسری متغیر مقدار کا "تفاعل" کہتے ہیں جبکہ دوسری چیزیں وہی برقرار رہیں اور موخرالذکر متغیر کی قیمت مقرر کر دیجائے تو اول الذکر متغیر کی قیمت متعین ہو جاتی ہے۔

اس قسم کا ربط رکھنے والی دو مقداروں میں اس طرح تمیز کیجاتی ہے کہ ان کو علی الترتیب "تابع متغیر" اور "متغیر متبوع" کہتے ہیں۔

ایک متغیر مقدار کے تفاعل کا تصور ریاضیات یا مختلف شاخوں میں پیدا ہوتا ہے۔ مثلاً علم الحساب میں ن اشیا کی ترتیبوں کی تعداد ن کا ایک تفاعل ہے گولیوں کے ایک مثلثی یا ایک مربع انبار میں گولیوں کی تعداد گولیوں کی اس تعداد کا تفاعل ہے جو قاعدے کے ہر ضلع میں ہوتی ہیں۔ کسی دئے ہوئے سلسلہ کی پہلی ن رقموں کا مجموعہ (مج ن) عدد ن کا تفاعل ہے۔ علیٰ ہذا القیاس۔ اس قسم کی بعض صورتوں میں ان زیر بحث تفاعلوں کے لئے ریاضی کے خاص خاص ضابطے ہوتے ہیں لیکن یہ ذہن نشین رہے کہ تفاعل کے منشا میں انکا وجود ضروری نہیں ہے۔ مثلاً سلسلہ

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots\cdots$$

کی پہلی ن رقموں کا مجموعہ ن کا ایک خاص تفاعل ہے اگرچہ اس مجموعہ کو ظاہر کرنے کے لئے ریاضی میں کوئی ٹھیک جملہ موجود نہیں ہے۔ اسی طرح اعداد مفرد کی تعداد جو ایک دئے ہوئے صحیح عدد ن سے تجاوز نہیں کرتے ن کا ایک خاص تفاعل ہے اگرچہ اس کو ایک ضابطہ سے تعبیر نہیں کیا جا سکتا۔

ان مثالوں میں متغیر متبوع لہٰذا اپنی نوعیت کے صرف محدود طور پر تبدیل ہو سکتا ہے صغاری احصا میں خصوصاً ایسی صورتوں پر بحث ہوتی ہے جنمیں متغیر متبوع دفعتاً

معنوں میں مسلسل ہو۔ مثلاً ہندسہ میں ایک دائرہ کا رقبہ یا ایک کرہ کا حجم نصف قطر کا ایک تفاعل ہوتا ہے نظری طبیعیات میں ایک گرنے والے ذرہ کا ارتفاع یا رفتار وقت کا ایک تفاعل سمجھی جاتی ہے۔ ایک دئیے ہوئے دباؤ پر گیس کے اجزا کا وسعت کا ایک تفاعل دئے ہوئے تپش پر ایک دی ہوئی گیس کا دباؤ وسعت کا ایک تفاعل سیر شدہ بھاپ کا دباؤ تپش کا ایک تفاعل وغیرہ متصور ہوتے ہیں۔ یہاں پر بھی تفاعل کے لئے ریاضی سے ایک مقدار کا وجود یا عدم وجود کوئی اہمیت نہیں رکھتا۔ دو متغیروں کے درمیان تفاعلی ربط قائم کرنے کے لئے صرف یہ ضروری ہے کہ ایک کی قیمت سے دوسرے کی قیمت کا تعین ہو جائے بشرطیکہ دوسری چیزیں غیر متغیر رہیں۔

عام طور پر ہم متغیر متبوع کو لا (x) سے اور تابع متغیر کو ما (y) سے تعبیر کرینگے۔ ان دونوں کے درمیان جو ربط ہوتا ہے اسکو اکثر

ما = ف (لا)، یا ما = فہ (لا)، وغیرہ

سے ظاہر کیا جائیگا۔ رمز ف (لا) [f(x)] سے مراد لا کا کوئی خاص تفاعل ہے۔

جب ایک مقدار ایک قیمت سے دوسری قیمت اختیار کرتی ہے تو یہ نئی قیمت پہلی قیمت سے جسقدر بڑی ہوتی ہے اسکو اس مقدار کا "اضافہ" کہتے ہیں خواہ یہ مثبت ہو یا منفی۔ اس اضافہ کو ہم اس طرح ظاہر کرینگے کہ متغیر مقدار کے پہلے مف جو "محدود فرق" کا اختصار خیال کیا جا سکتا ہے لکھدیا جائیگا۔ انگریزی میں اس علامت کے لئے Δ ہے [مف ≡ Δ]۔ ۱۴

مثلاً ہم کہتے ہیں کہ متغیر متبوع لا سے بدل کر لا + مف لا ہو جاتا ہے اور اس کی وجہ سے تابع متغیر ما سے بدل کر ما + مف ما ہو جاتا ہے۔

پس اگر　ما = ف (لا) . . . . (۱)

تو　ما + مف ما = ف (لا + مف لا) . . . . . (۲)

اس لئے　مف ما = ف (لا + مف لا) − ف (لا) . . . . (۳)

فی الحال اس ترقیم میں یہ مفہوم داخل نہیں ہے کہ مف لا یا مف ما چھوٹا ہے۔ ربط (۳) پورا ہونے پر اضافوں کی کوئی قیمتیں ہو سکتی ہیں۔

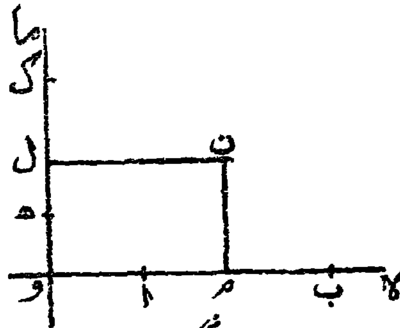
مثال (۱)۔ اگر ما = لا^۳ تو جب لا = ۱۰۰، مف لا = ۱ تو
مف ما = (۱۰۱)^۳ - (۱۰۰)^۳ = ۳۰۳۰۱

مثال (۲)۔ اگر ما = جب لا^° تو اگر لا = ۶۰، مف لا = ۱ تو
مف ما = ۸۶۶۰۳، - ۸۷۴۶۲، = ۰۰۸۵۹،

ایک خاص درجہ صحت تک

۷۔ تفاعلوں کی ہندسی تعبیر۔

متغیروں لا، ما کے درمیان جو ربط ہے اب ہم اسکی ہندسی تعبیر علی القوائم محاور و لا، و ما لیکر معلوم کرتے ہیں۔ و لا میں طول و م لو اس طرح کہ وہ متغیر متبوع لا کی کسی خاص قیمت کو تعبیر کرے اور و ما میں و ل لو جو تفاعل ما کی متناظر قیمت کو تعبیر کرے اور مستطیل و م ن ل کی تکمیل کرو تو نقطہ ن کا مقام



شکل (۶)

دونو مربوط متغیروں کی قیمتوں کو ظاہر کریگا۔

اب چونکہ نقطہ م بموجب فرض و لا پر کوئی مقام اختیار کر سکتا ہے جو (ممکن ہے کہ) دو ثابت سروں کے درمیان ہو ہمیں اس طرح نقاط ن کا ایک لامتناہی گروہ حاصل ہوتا ہے۔

اس گروہ کی نوعیت سے متعلق اب ایک سوال پیدا ہوتا ہے۔ کیا اس

گروہ کے نقاط ایک منحنی پر واقع ہوتے ہیں ؟۔ اکثر صورتوں میں اسکا جواب ظاہر ہے۔ مثلاً ایک دائرہ کے رقبہ اور اس کے نصف قطر کے درمیان جو ربط ہوتا ہے اسکی اگر ہندسی تعبیر معلوم کرنا ہو تو ہم و م کو نصف قطر کے متناسب اور ن م کو رقبہ کے متناسب لیتے ہیں۔ اس طرح ن م = و م² اور نقاط ن ایک مکافی پر واقع ہوتے ہیں یہی منحنی اس ربط کو بھی تعبیر کریگا جو ایک گرنے والے جسم کے طے شدہ فاصلہ (ف) اور وقت (ت) کے درمیان ہے کیونکہ ف ایسے بدلتا ہے جیسے ت²۔

لیکن عام صورت میں ہمارا جواب نفی میں ہونا چاہیئے۔ دفعہ (۶) کی ابتدا میں تفاعل کی جو تعریف کی گئی ہے اس کا ضروری مفہوم یہ ہے کہ لا کی ہر قیمت کے جواب میں ما کی ایک خاص قیمت ہوتی ہے لیکن لا کی مختلف قیمتوں کے جواب میں ما کی جو قیمتیں ہیں ان میں کسی ربط کا موجود ہونا ضروری نہیں ہے خواہ لا کی یہ مختلف قیمتیں ایک دوسرے سے کتنی ہی قریب واقع ہوں۔

تفاعل کی جس تعریف کا حوالہ دیا گیا ہے وہ درحقیقت ہمارے موجودہ مقاصد کا لحاظ کرتے ہوئے بہت زیادہ وسیع ہے۔ عام طور پر احصا میں ایسے تفاعلوں سے سابقہ پڑے گا جو چند خاص اہم قیود کی پابندی کرتے ہیں۔

ان میں سے پہلی قید وہ ہے جو تسلسل کے نام سے موسوم ہے۔ اس کا مقصد یہ ہے کہ جس طرح نقطہ م خط و لا کے کسی محدود حصہ ا ب پر چلتا ہے ل بھی خط و ما کے ایک محدود حصہ ھ ک پر چلتا ہے یعنی ل کم سے کم ایک مرتبہ ھ اور ک کے درمیان ہر مقام کو اختیار کرتا ہے مزید بریں اگر وسعت ا ب کو مسلسل گھٹا دیا جائے تو وسعت ھ ک بھی گھٹتی ہے اور ا ب کو کافی چھوٹا لینے سے اس قدر چھوٹی بنائی جا سکتی ہے جسقدر ہم چاہیں۔

ابھی ہم یہ دیکھینگے (دفعہ ۸) کہ اس دوسری خاصیت میں پہلی خاصیت شامل ہے۔ اب ہم مسلسل تفاعل کی باضابطہ تعریف دینگے جو اگرچہ

کسی قدر مختلف ہے لیکن مندرجہ بالا کے مماثل ہے۔

۸۔ مسلسل تفاعل کی تعریف۔

فرض کرو کہ متغیر متبوع اور تفاعل کی کوئی دو متناظر قیمتیں لا، ما ہیں۔
اگر متغیر متبوع کی قابل قبول قیمتوں کا کوئی اختیاری تواتر لا$_1$، لا$_2$ .... لا$_n$
لیا جائے جس کی انتہا لا ہے اور ان قیمتوں کے جواب میں تفاعل کی قیمتوں
کا تواتر ما$_1$، ما$_2$، .... ما$_n$، .... حاصل ہو جو انتہا ما کی طرف ہمیشہ
متدق ہوتا ہے تو متغیر متبوع کی اس خاص قیمت لا کے لئے تفاعل کو
مسلسل کہتے ہیں۔

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر مف لا، لا کے اضافہ کو تعبیر کرے
اور مف ما، ما کے متناظر اضافہ کو ظاہر کرے تو ہم ہمیشہ ایک مثبت مقدار
صہ (جو صفر نہیں ہے) معلوم کر سکتے ہیں ایسی کہ مف لا کی تمام
قابل قبول* قیمتوں کے لئے جو مطلق قیمت میں صہ سے کم ہوں، مف ما
کی قیمت مطلق قیمت میں ثہ سے کم ہو گی جہاں ثہ کوئی مقررہ مقدار ہے
خواہ وہ کتنی ہی چھوٹی ہو۔ اسے باضابطہ تعریف خیال کیا جا سکتا ہے اس
تعریف میں جو شرط شامل ہے اگر وہ پوری نہ ہو تو قبل الذکر تعریف کی شرط بھی
پوری نہیں ہو سکتی اس طرح یہ دونوں تعریفیں ایک دوسرے کے مماثل ہیں۔
اس دوسری تعریف کو اجمالاً لیکن غیر مکمل صورت میں کبھی اس طرح بھی
بیان کرتے ہیں کہ متغیر متبوع میں ایک لا انتہا ہی چھوٹی تبدیلی تفاعل میں ایک
لا انتہا ہی چھوٹی تبدیلی پیدا کر دیتی ہے۔ اس کے یہ معنی ہیں کہ اگر ف (لا) کوئی

* مف لا کی قابل قبول قیمتوں کی قید کے یہ معنی ہیں کہ لا + مف لا متغیر متبوع کی قیمتوں
کی اس وسعت کے اندر واقع ہونا چاہئے جس کی تفاعل اجازت دیتا ہے۔

تفاعل ہو تو ایک مقدار صہ کا معلوم کرنا ممکن ہونا چاہئے اس طرح کہ

| ف (لا + ھ) - ف (لا) | < ثہ

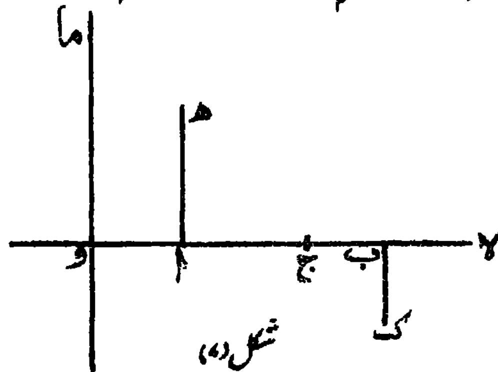
ھ کی تمام جائز قیمتوں کے لئے اس طرح کہ | ھ | < صہ ، صہ کی قیمت عام طور پر ثہ کی قیمت پر منحصر ہوتی ہے لیکن اس تعریف میں یہ مفہوم مضمر ہے کہ صہ کی کسی خاص قیمت سے شرط بالا ہمیشہ پوری ہو سکتی ہے خواہ ثہ کتنا ہی چھوٹا ہو۔

۹۔ مسلسل تفاعل کی خاصیت۔

اگر ف (لا) ایک تفاعل ہو جو لا = ا سے لا = ب تک مسلسل ہے اور اگر ف (ا) ، ف (ب) مختلف العلامت ہوں تو ا اور ب کے درمیان لا کی کم سے کم ایک قیمت ضرور ہوگی جس کے لئے ف (لا) = ۰

شکل ذیل میں صراحت کی خاطر مان لیا گیا ہے کہ ف (ا) مثبت اور ف (ب) منفی ہے۔ خط لا لا کے وہ نقطے جہاں لا = ا ، لا = ب علی الترتیب ا ، ب سے تعبیر کئے گئے ہیں اور تفاعل کی متناظر قیمتیں ا ھ ، ب ک سے تعبیر ہوتی ہیں۔ ثبوت اس بات پر مشتمل ہے کہ طول میں گھٹنے والے وقفوں کا سلسلہ

اب ، $\frac{۱}{۲}$ اب ، $\frac{۱}{۲^۲}$ اب ، ...... ، $\frac{۱}{۲^ن}$ اب ، ....



شکل (۷)

۱۷ معلوم ہو سکتا ہے اس طور پر کہ ہر وقفہ اپنے سے پہلے وقفہ کا ایک حصہ ہو اور
ہر ایک ایسے نقاط پر مشتمل ہو جن پر ف (لا) مثبت اور نیز ایسے نقاط پر جن پر
ف (لا) منفی ہوتا ہو۔

فرض کرو کہ (اب) کی تنصیف م پر ہوتی ہے۔ اگر م پر ف (لا) = ۰
تو اس خاص صورت کے لئے مسئلہ بالا درست ہو جاتا ہے۔ اس لئے ہم اس کو
اور اسکی مماثل صورتوں کو اپنے ثبوت سے خارج کر دیتے ہیں۔ اگر ف (لا)
نقطہ م پر صفر نہیں ہوتا تو (ا م) اور (م ب) وقفوں میں سے کم سے کم ایک
وقفہ میں تفاعل کی قیمتیں مثبت اور منفی دونو ہونگیں۔ اگر صرف ایک وقفہ میں
یہ بات پائی جائے تو ہم اس کو منتخب کر لیتے ہیں اور اگر دونو میں تو انتخاب اختیاری
ہے۔ منتخب شدہ وقفہ کو پھر م پر تنصیف کیا جاتا ہے۔ اس صورت کو خارج
کرکے جو اس م پر ف (لا) صفر ہو جاتا ہے ان دو نصف حصوں میں کم سے کم
ایک حصہ ایسا ضرور ہوگا جس میں تفاعل کی قیمتیں مثبت اور منفی دونو ہونگیں
اس عمل کو لا متناہی طور پر جاری رکھا جا سکتا ہے اور چونکہ

$$م_ن \, م_{ن+1} = \frac{1}{2^{ن+1}} \, اب$$

دفعہ (۴) سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ تقسیم کرنے والے نقاط کے تواتر

$م_1$ ، $م_2$ ، .... $م_ن$ ، ....

میں جو اس طرح کے عمل سے حاصل ہوتا ہے ایک خاص انتہائی مقام ج
(فرض کرو) ہونا چاہئے۔

مزید براں ج پر ف (لا) کی قیمت صفر ہونی چاہئے۔ کیونکہ اگر یہ قیمت
مثبت ہو تو ج کے دونو طرف ایک محدود وسعت ایسی ہونی چاہیے جس میں
ف (لا) مثبت ہوگا اور یہ اس وجہ سے کہ ف (لا) کو مسلسل تسلیم کر لیا
گیا ہے۔ یہ اس نتیجہ کے منافی ہے جو ابھی ہم نے ثابت کیا۔ اسی طرح ج پر
ف (لا) کی قیمت منفی نہیں ہو سکتی۔

مسئلہ بالا کو ہم اجمالاً اس طرح بیان کر سکتے ہیں کہ ایک مسلسل تفاعل اپنی

علامت تبدیل نہیں کر سکتا جب تک کہ وہ صفر قیمت میں سے نہ گذرے۔

اگر ف (لا) ایک تفاعل ہو جو لا = ا سے لا = ب تک مسلسل ہے اور اگر ف (ا)، ف (ب) غیر مساوی ہوں تو ا اور ب کے درمیان لا کی ایک قیمت موجود ہونی چاہئے ایسی کہ ف (لا) = ب جہاں ب، ف (ا) اور ف (ب) کے درمیان کوئی مقدار ہو سکتی ہے۔ کیونکہ فرض کرو

فہ (لا) = ف (لا) - ب

چونکہ ب مستقل ہے فہ (لا) بھی ایک مسلسل تفاعل ہوگا۔ بموجب فرض

ف (ا) - ب اور ف (ب) - ب

مختلف العلامت ہیں اور اس لئے فہ (ا) اور فہ (ب) مختلف العلامت

پس مسئلہ بالا سے ا اور ب کے درمیان لا کی ایک قیمت موجود ہونی چاہئے جس کے لئے فہ (لا) = یعنی ف (لا) = ب

بالفاظ دیگر ایک مسلسل تفاعل ایک قیمت سے دوسری قیمت تک جا نہیں سکتا جب تک کہ ہر درمیانی قیمت کو (کم سے کم) ایک مرتبہ اختیار نہ کرے۔

۱۵ - مسلسل تفاعل کی ترسیم

جو کچھ کہ ہم نے اوپر بیان کیا ہے اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ نقاط کا گروہ جو ایک تفاعل کو دفعہ (۷) کے مستوی میں تعبیر کرتا ہے ایک مسلسل گروہ پیدا کرتا ہے۔ اس کے یہ معنی ہیں کہ اس گروہ میں سے کوئی ایسا خط نہیں کھینچا جا سکتا جو اس کے کسی ایک نقطہ میں سے نہ گذرے۔ کیونکہ اگر تفاعل کو فہ (لا) سے اور کسی خط کے مبین کو ف (لا) سے تعبیر کریں اور اگر ف (لا) اور فہ (لا) دونوں مسلسل ہوں تو فرق

فہ (لا) - ف (لا)

بھی مسلسل ہوگا (دفعہ ۱۲) اور اس لئے یہ علامت بدل نہیں سکتا جب تک کہ صفر قیمت میں سے نہ گزرے۔

اب یہ سوال پیدا ہوتا ہے کہ کیا ہم نقاط کے ایک مسلسل گروہ کا ایک منحنی بہ

۱۸

واقع ہونا فرض کر سکتے ہیں۔ اسکا جواب زیادہ تر اس پر منحصر ہے کہ اصطلاح "منحنی" کے ساتھ کیا خاصیتیں لازم قرار دیجاتی ہیں۔ بہر کیف یہ تو ظاہر ہے کہ گروہ سے متعلق کافی نقاط معلوم کر کے ان کو عملی طور پر ایک کاغذ پر مرتسم کرنے اور ان میں سے گذرتا ہوا ایک مسلسل خط کھینچنے سے ہم ایک مسلسل تفاعل کے عام طریق یا چال کو اچھی طرح ظاہر کر سکتے ہیں۔ جو شکل اس طرح بنائی جاتی ہے اس کو تفاعل کی ترسیم کہتے ہیں۔

ذیل کے تفاعلوں کی ترسیمات سے طالب علم بخوبی واقف ہوگا، یہ سادہ اور دو درجی سادہ تفاعلوں کی تشریح کے لئے استعمال ہوتی ہیں۔

تا = ا لا + ب ، تا = ا لا^2 + ب لا + ج

اس کتاب میں ترسیمی طریقِ توضیح کو اکثر استعمال کیا جائیگا (جیسا دوسری ابتدائی کتابوں میں استعمال کیا جاتا ہے) لیکن یہ بتا دینا ضروری ہے کہ تفاعل ریاضی پیمائش کا استعمال کرنے میں خاص خاص قیود کا خیال رکھنا پڑتا ہے۔ سب سے پہلے یہ ظاہر ہے کہ جدا جدا قیمتوں کی ایک محدود تعداد تفاعل کو پوری طرح تعبیر نہیں کر سکتی۔ اور درحقیقت جب تک کہ لا کی قیمتوں کے انتخاب میں جن کے لئے تفاعل محسوب کیا جا رہا ہے احتیاط سے کام نہ لیا جائیگا نتیجے سے بہت زیادہ غلط فہمی پیدا ہو سکتی ہے۔ مزید برآں سیاہی یا پنسل کی لکیر جس سے تفاعل کا طریق تعبیر کرتے ہیں (بہ خلاف خیالی ریاضی خط کے) [illegible] ایک پٹی کی شکل اس کی [illegible] ہے جو محور لا کو تعبیر کرتی ہے۔ اس پٹی کے کناروں کے درمیان جو فاصلہ ہے اسکو صحیح طور پر معلوم کرنے میں [illegible] ناممکن ہے۔ [illegible] سے ایک حد سے زیادہ تفصیلات کا بیان کرنا ناممکن ہے۔ اس لئے یہ طریقہ ایسے تفاعلوں کی صورت میں (جنکا وجود ثابت کیا جا سکتا ہے) نہایت ناقص سمجھا جاتا ہے جن میں پیمانہ کو بڑا کرنے سے نئی نئی پیچیدہ تفصیلات کا انکشاف رونما ہوتا ہے۔* موخرالذکر

* مثلاً تفاعل جب $(\frac{۱}{لا})$ کی تفصیلات مبدأ کے پاس۔

قبیل کے تفاعیل احصا میں بہت کم استعمال ہوتے ہیں۔

ترسیمی تعبیر کا طریقہ اکثر اس وقت استعمال کیا جاتا ہے جبکہ تفاعل کے لیے ریاضی شکل کا کوئی [illegible] ہو سکے اور مشاہدہ سے متغیر [illegible] اور تابع متغیر کی چند متناظر قیمتیں [illegible] ہے۔ اس صورت میں خطوط کی موٹائی کی وجہ سے جس ابہام کا امکان [illegible] کے تفاعل [illegible] ہے جو [illegible] کے تفاعل اور مشاہدے [illegible] پیدا ہوتی ہیں۔

[illegible] جدولوں کا مشاہدہ کیا ہوگا [illegible] ابھرتا یا [illegible] ایک تفاعل کی صورت میں ظاہر کیا جاتا ہے [illegible] جو ترسیم حاصل کی جاتی ہے اس سے درحقیقت انہی باتوں کا اظہار [illegible] جو اس عددی جدول سے [illegible] کی [illegible] کا ایک سلسلہ مندرج ہوتا ہے لیکن ترسیمی شکل زیادہ [illegible] تفاعل کی درمیانی قیمتوں کا تصور پیدا کرنے میں مدد دیتی ہے۔

۱۱۔ [illegible] مسلسل

[illegible] جن تفاعلوں سے سابقہ پڑتا ہے وہ عام طور پر زیر بحث [illegible] مسلسل ہوتے ہیں لیکن بعض اوقات [illegible] پائی جاتی۔

مثال [illegible] ہے کہ متغیر [illegible] چند خاص قیمتوں کے لئے تفاعل کی [illegible] مثال کے طور پر تفاعل

جب لا / لا

[illegible] لا [illegible] کے لئے شمار کنندہ اور نسب نما کی خاص [illegible] ہیں اور خارج قسمت کا وجود ہوتا ہے۔ لیکن جب لا = ۰ تو کسر غیر معین شکل [illegible] اختیار کر لیتی ہے۔ یہ صحیح ہے کہ عام طور پر اسکی قیمت

فرض کر لی جاتی ہے لیکن ابتدائی تعریف کا یہ مفہوم نہیں ہے۔ اسی طرح کی بہت سی اور مثالیں پیش آئیں گی۔

مزید براں تفاعل ف (لا) لا کی کسی خاص قیمت لا۱ کے لئے لامتناہی ہو سکتا ہے۔ اس کے یہ معنی ہیں کہ لا۱ کو کافی طور پر لا۱ کے تقریباً مساوی لینے سے تفاعل کی قیمت کسی مقدار سے جو ہم منتخب کریں تجاوز ہو سکتی ہے خواہ یہ مقدار کتنی ہی بڑی ہو۔ اسکو عام طور سے ہم ضابطہ

نہا ف (لا) = ∞
لا ← لا۱

سے تعبیر کرینگے۔ ریاضیات میں لفظ "لامتناہی" کے صرف وہی معنی ہیں جو اوپر بیان ہوئے اور رمز ∞ کا استعمال صرف اس قسم کے مجمل ضابطوں کے ذریعہ ہو سکتا ہے جو اوپر بیان ہوئے۔

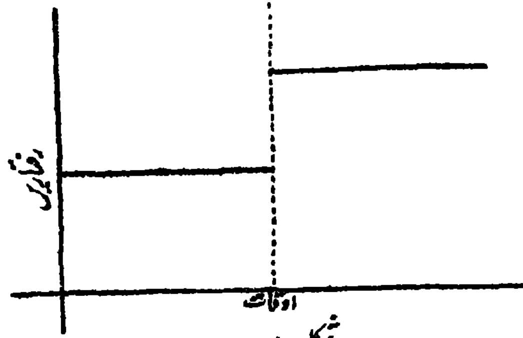
تفاعل ۱/لا جو لا ← ۰ کے لئے لامتناہی ہو جاتا ہے اور تفاعل مس لا جو لا ← ۱/۲ π کے لئے لامتناہی ہوتا ہے متذکرہ بالا بیان کی مثالیں حاصل ہوتی ہیں۔ (ملاحظہ ہو شکل ۱۸ صفحہ ۲۰)

نیز علم حیل میں رقاص کے اہتزاز کا دور جو سعت (عہ) کا تفاعل ہوتا ہے عہ ← π کے لئے لامتناہی ہو جاتا ہے۔

مزید براں ایک تفاعل گو محدود ہو لیکن لا کی کسی خاص قیمت لا۱ کے لئے غیر مسلسل ہو سکتا ہے یعنی لا = لا۱ − ضہ اور لا = لا۱ + ضہ کے لئے اس کی قیمتیں غیر مساوی ہو سکتی ہیں خواہ ضہ کتنا ہی چھوٹا ہو۔ ایسی صورت میں تفاعل کی ابتدائی تعریف سے لا = لا۱ کے لئے تفاعل کی ایک معین قیمت حاصل ہو سکتی ہے یا حاصل نہیں ہو سکتی۔

اس کی مثال علم حیل سے مل سکتی ہے۔ ایک ذرہ حرکت کر رہا ہے اور حرکت کی سمت میں اس کو ایک دھکا دیا جاتا ہے [illegible] اس صورت میں ٹھیک اس لمحہ پر ذرہ کی رفتار غیر معین ہوتی ہے اگرچہ دھکے کے عین

پیشتر اور حین بعد کی رفتاروں کی تعیین ہو سکتی ہے۔



شکل (۸)

عدم تسلسل کی اور مثالیں ہو سکتی ہیں لیکن اس مضمون کے عام استعمال میں نہیں پائی جاتیں۔

۱۲۔ مسلسل تفاعلوں سے متعلق مسائل۔

اب ہم مختلف تفاعلوں کے تسلسل یا عدم تسلسل کی تحقیق کرینگے اور انکی ترسیمی تعبیر کی نوعیت معلوم کرینگے جبکہ ان تفاعلوں کی صریحی طور پر ریاضی تعیین ہو سکے۔

اس مقصد کے لئے حسب ذیل ابتدائی مسائل کا جان لینا ضروری ہے۔

۱۔ مسلسل تفاعلوں کی ایک محدود تعداد کا مجموعہ خود ایک مسلسل تفاعل ہوتا ہے

پہلے فرض کرو کہ متغیر متبوع لا کے دو تفاعل ع اور و ہیں۔ تب

مف(ع+و) = (ع+ مف ع+ و+ مف و) - (ع+ و)

= مف ع + مف و

تسلسل کی تعریف سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ثہ کی خواہ کوئی قیمت ہو ہم ایک ۲۱
مقدار صہ معلوم کر سکتے ہیں اس طرح کہ

|مف لا| < صہ کیلئے |مف ع| < ½ ثہ اور |مف و| < ½ ثہ اور اس لئے

|مف ع + مف و| < ش

پس تفاعل ع + و مسلسل ہے۔

اب اگر تین مسلسل تفاعل ع، و، ھ ہوں تو ع + و مسلسل ہے جس طرح کہ ثبوت بالا سے ظاہر ہے اور اس لئے (ع + و) + ھ مسلسل ہے۔ اسی طرح اس مسئلہ کو قدم بہ قدم تفاعلوں کی ایک محدود تعداد کی صورت میں وسعت دیجا سکتی ہے۔

۲۔ مسلسل تفاعلوں کی ایک محدود تعداد کا حاصل ضرب خود ایک مسلسل تفاعل ہوتا ہے۔

پہلے دو تفاعلوں ع، و کی صورت پر غور کرو۔

مف (ع و) = (ع + مف ع)(و + مف و) − ع و

= و مف ع + ع مف و + مف ع مف و

بموجب فرض ہم |مف لا| کو کافی چھوٹا لیکر |مف ع| اور |مف و| کو کسی مقررہ مقدار سے چھوٹا بنا سکتے ہیں خواہ یہ مقدار کتنی ہی چھوٹی ہو۔ پس چونکہ ع اور و محدود ہیں |و مف ع| اور |ع مف و| کسی مقررہ مقدار سے چھوٹے بنائے جا سکتے ہیں خواہ یہ مقدار کتنی ہی چھوٹی ہو۔ یہی حال |مف ع مف و| کا ہے۔ اس لئے

|و مف ع + ع مف و + مف ع مف و|

کی قیمت بھی کسی مقررہ مقدار سے چھوٹی بنائی جا سکتی ہے خواہ یہ مقدار کتنی ہی چھوٹی ہو۔ یعنے ع و ایک مسلسل تفاعل ہے۔

اب فرض کرو کہ تین مسلسل تفاعل ع، و، ھ ہیں ہم نے دیکھ لیا کہ ع و مسلسل ہے اس لئے (ع و) ھ بھی مسلسل ہے۔ اور اسی طرح مسلسل تفاعلوں کی ایک محدود تعداد کے حاصل ضرب کی صورت میں بھی یہ درست ہے۔

۳۔ دو مسلسل تفاعلوں کا خارج قسمت مسلسل تفاعل ہوتا ہے سوائے متغیر متبوع کی اُن قیمتوں کے لئے (اگر کوئی ہوں) جن کے لئے مقسوم علیہ صفر ہوتا ہو۔

فرض کرو کہ تفاعل ع اور و دیے ہوئے

$$\text{مف}\left(\frac{\text{ع}}{\text{و}}\right) = \frac{\text{ع} + \text{مف ع}}{\text{و} + \text{مف و}} - \frac{\text{ع}}{\text{و}}$$

$$= \frac{\text{و مف ع} - \text{ع مف و}}{\text{و}\,(\text{و} + \text{مف و})}$$

بموجب فرض $\text{و} \neq 0$ اس لئے مقدار $\text{و}\,(\text{و} + \text{مف و})$ کی مطلق قیمت کی ایک سفلی انتہا م ہونی چاہئے جو صفر نہیں ہو سکتی۔ پس

$$\left|\text{مف}\left(\frac{\text{ع}}{\text{و}}\right)\right| < \left|\frac{\text{و}}{\text{م}}\,\text{مف ع} - \frac{\text{ع}}{\text{م}}\,\text{مف و}\right|$$

اب چونکہ $\frac{\text{و}}{\text{م}}$ اور $\frac{\text{ع}}{\text{م}}$ محدود ہیں ہم مف لا کو کافی چھوٹا لینے سے

$\left|\frac{\text{و}}{\text{م}}\,\text{مف ع}\right|$ اور $\left|\frac{\text{ع}}{\text{م}}\,\text{مف و}\right|$ کو کسی مقررہ مقدار سے چھوٹا بنا سکتے

ہیں خواہ یہ مقدار کتنی ہی چھوٹی ہو۔ اس لئے $\left|\text{مف}\left(\frac{\text{ع}}{\text{و}}\right)\right|$ پر بھی یہ درست

ہوگا۔ یعنی خارج قسمت $\frac{\text{ع}}{\text{و}}$ مسلسل ہے۔

۴۔ اگر ما، ع کا ایک مسلسل تفاعل ہو جہاں ع، لا کا ایک مسلسل تفاعل ہے تو ما، لا کا ایک مسلسل تفاعل ہوگا۔

کیونکہ فرض کرو کہ لا کا کوئی اضافہ مف لا، ع کا متناظر اضافہ مف ع اور ما کا متناظر اضافہ مف ما ہے۔ چونکہ ما، ع کا ایک مسلسل تفاعل ہے ہم ایک مقدار صہ معلوم کر سکتے ہیں اس طرح پر کہ اگر

$$|\text{مف ع}| < \text{صہ} \quad \text{تو} \quad |\text{مف ما}| < \text{ثہ}$$

جہاں ثہ کوئی مقررہ مقدار ہو سکتی ہے خواہ وہ کتنی ہی چھوٹی ہو۔ اور چونکہ ع، لا کا ایک مسلسل تفاعل ہے ہم ایک مقدار صہ معلوم کر سکتے ہیں اس طرح پر کہ اگر

$$|\text{مف لا}| < \text{صہ} \quad \text{تو} \quad |\text{مف ع}| < \text{صہ}$$

پس اگر ... تو ...
جو ما کے مسلسل ہونے کی شرط ہے جبکہ ما کا ایک تفاعل ہو۔

۳۱ - جبری تفاعل - منطق صحیح تفاعل۔

جبری تفاعل ... متغیر ... پر ... اور ... کے اعمال ... ہوتا ہے بشرطیکہ ان اعمال کی تعداد محدود ہو۔
باقی تمام تفاعلوں کو ... کے نام سے موسوم کیا جاتا ہے۔ ... میں لامتناہی ... کا مفہوم ... کسی شکل میں مضمر ہوتا ہے (دفعات ...)۔
منطق جبری تفاعل اس کو کہتے ہیں جو صرف ... کے اعمال سے حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح کا کوئی تفاعل

$$\frac{\text{ف}(لا)}{\text{ق}(لا)}$$

کی شکل میں تحویل ہو سکتا ہے جہاں ... منطق صحیح ... یعنی ان میں سے ہر ایک

$$ا_{\cdot}لا^{ن} + ا_{۱}لا^{ن-۱} + ا_{۲}لا^{ن-۲} + \ldots + ا_{ن-۱}لا + ا_{ن} \quad (۱)$$

کی شکل کا ہے جہاں (ن) ایک مثبت صحیح عدد ہے اور تمام ... مستقل ہیں۔ اس قسم کے جملے کو جب وہ ایک سے زیادہ ارقام پر مشتمل ہو ... تمام کہینگے۔ اس کا جبری ہونا مان لیا جاتا ہے۔

منطق صحیح تفاعل متغیر کی تمام محدود قیمتوں کے لئے محدود اور مسلسل ہوتا ہے۔ کیونکہ $لا^م$ مسلسل تفاعلوں (جن میں سے ہر ایک لا کے مساوی ہے) کی ایک محدود تعداد (م) کا حاصل ضرب ہے اور اس لئے محدود اور مسلسل ہے۔ پس $ا_م لا^م$ بھی محدود اور مسلسل ہے۔ اور اس قسم کی ارقام کی کسی محدود تعداد کا مجموعہ بھی محدود اور مسلسل ہے (دفعہ ۱۲)۔

منطق صحیح تفاعل لا ← ± ∞ کے لئے لامتناہی ہو جاتا ہے۔

شکل

$$\text{لا}^{\text{ن}}\left(\text{ا}_{\text{ن}} + \frac{\text{ا}_{\text{ن}-1}}{\text{لا}} + \frac{\text{ا}_{\text{ن}-2}}{\text{لا}^2} + \cdots\cdots + \frac{\text{ا}_1}{\text{لا}^{\text{ن}-1}} + \frac{\text{ا}_{\cdot}}{\text{لا}^{\text{ن}}}\right)$$

میں لکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ لا کو کافی بڑا (مطلق قیمت میں) لینے سے ہم پہلے جزوِ ضربی ($\text{لا}^{\text{ن}}$) کو جس قدر بڑا بنانا چاہیں بنا سکتے ہیں اور ساتھ ہی ساتھ دوسرے جزو ضربی کی قیمت $\text{ا}_{\text{ن}}$ کے اسقدر قریب لائی جا سکتی ہے جسقدر ہم چاہیں۔ یعنی انکا حاصل ضرب اسقدر بڑا بنایا جا سکتا ہے جسقدر ہم چاہیں۔ مزید براں اگر لا مثبت ہو تو حاصل ضرب کی علامت وہی ہوگی جو $\text{ا}_{\text{ن}}$ کی ہے لیکن جب لا منفی ہو تو حاصل ضرب کی علامت وہی ہوگی جو $\text{ا}_{\text{ن}}$ کی ہے یا اس کے برعکس بموجب اس کے کہ ن جفت یا طاق ہو۔

امور متذکرہ بالا سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ منطق صحیح تفاعل

ما = ف (لا) کی ترسیمی تعبیر میں منحنی ہر جگہ محور لا سے محدود فاصلے پر واقع ہوتا ہے لیکن اس سے ہٹتا جاتا ہے بغیر کسی حد کے جس طرح لا مسلسل طور پر بغیر حد کے بڑھتا ہے خواہ یہ مثبت سمت میں بڑھے یا منفی سمت میں۔ منحنی کو عملی طور پر بنانے میں مساوات ف (لا) = ۰ کو حل کر لینا مفید ہوتا ہے (اگر اس کا حل معلوم کرنا ممکن ہو) کیونکہ اس سے یہ معلوم ہو جاتا ہے کہ منحنی محور لا کو کتنے نقاط پر قطع کرتا ہے۔

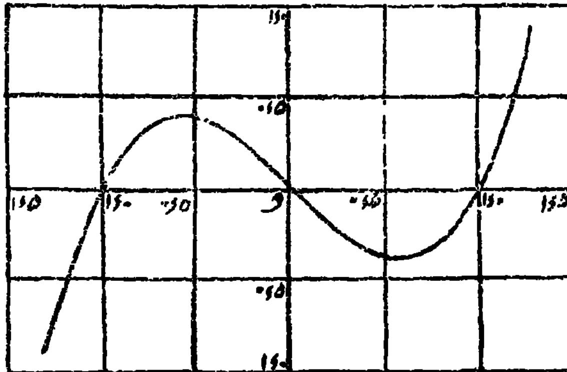
مثال۔ منحنی ما = لا (لا^2 - ۱) کی ترسیم۔ یہ منحنی محور لا کو نقاط لا = ۰، ± ۱ پر قطع کرتا ہے۔ چونکہ جب لا ← ۰، لا بمقابلہ لا کے لا انتہا چھوٹا ہوتا ہے اس لئے منحنی مبدأ کے قریب خط مستقیم ما = - لا کی شکل تقریباً اختیار کرتا ہے جو دراصل مبدأ پر منحنی کا مماس ہے۔

چونکہ ما، لا کے ساتھ علامت بدلتا ہے ہم صرف لا کی مثبت قیمتوں کے لئے معینوں کو محسوب کرتے ہیں۔ ہم بہ آسانی

حسب ذیل جدول مرتب کرسکتے ہیں جہاں صرف دو ملحوظ ہندسوں کو عمل میں قائم رکھا گیا ہے۔

لا	تا	لا	تا
ر۱	−ر۱۰	ر۸	−ر۲۹
ر۲	−ر۱۹	ر۹	−ر۱۷
ر۳	−ر۲۷	۱ر۰	۰
ر۴	−ر۳۴	۱ر۱	+ر۲۳
ر۵	−ر۳۸	۱ر۲	+ر۵۱
ر۶	−ر۳۸	۱ر۳	+ر۸۸
ر۷	−ر۳۶	∞	∞

شکل ذیل اس منحنی کو تعبیر کرتی ہے۔



شکل (۹)

۱۴۔ منطق کسیریں۔

تفاعل ما = فا (لا) / ف (لا) .... (۱)

جو منطق ہے لیکن صحیح تفاعل نہیں ہے، لا کی تمام محدود قیمتوں کے لئے سوائے اُن قیمتوں کے جن کے لئے ف (لا) = ۰* ما محدود اور مسلسل ہے۔ کیونکہ یہ ثابت کر دیا گیا ہے کہ منطق صحیح تفاعل فا (لا) اور ف (لا) محدود اور مسلسل ہوتے ہیں جس سے بموجب دفعہ (۲) یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ خارج قسمت بھی محدود اور مسلسل ہوگا سوائے اس صورت کے جبکہ نسب نما صفر ہو جائے۔

(۱) سے تعبیر ہونے والا منحنی محور لا کو اِن نقاط پر قطع کریگا (اگر کوئی ہوں) جنکے لئے فا (لا) = ۰۔ ما کے متوازی منحنی کے متقارب ہوں گے جہاں کہیں ف (لا) = ۰۔ اور لا کی باقی تمام محدود قیمتوں کے لئے ما محدود اور مسلسل ہوگا۔

لا ← ± ∞ کے جواب میں ما کی قیمتیں فا (لا) اور ف (لا) کے اضافی درجوں پر منحصر ہوتی ہیں۔ اگر فا (لا)، ف (لا) سے بڑے درجہ کا ہو تو تعین لامتناہی ہو جاتے ہیں لیکن اگر کم درجہ کا ہو تو تعین لانہایتا چھوٹے ہوتے ہیں۔ اس صورت میں محور لا متقارب ہوتا ہے۔ اگر دونوں کا درجہ وہی ہو تو محور لا کے متوازی ایک متقارب ہوتا ہے۔

ایسی صورتوں میں جہاں شمار کنندہ کا درجہ نسب نما کے درجہ سے کم نہ ہو یہ بہتر ہوگا کہ شمار کنندہ کو نسب نما سے اتنا تقسیم کیا جائے کہ باقی مقسوم علیہ کے درجہ سے کم درجہ کا ہو اور پھر ما کو ایک صحیح تفاعل اور ایک صحیح کسر کے مجموعہ سے ظاہر کیا جائے۔

چند ضروری امور کی وضاحت حسب ذیل مثالوں سے ہوگی۔

۲۵

مثال ۱- ما = (۱ - لا) / (۲ لا) = - ۱/۲ + ۱/(۲ لا)

اس میں اگر لا = ۱ تو ما = ۰۔ اور لا ← ۰ تو ما ← ± ∞۔ نیز ۱ > لا > ۰ کے لئے

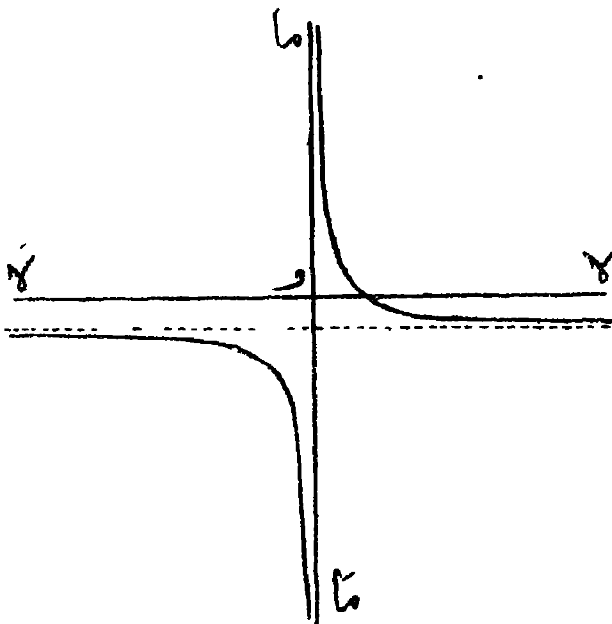
* یہ مان لیا گیا ہے کہ کسر مفرد ترین شکل میں ہے۔

ما مثبت ہے اور اس وقفہ کے باہر منفی ۔ ما کی دوسری صورت سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اگر لا ← ± ∞ تو ما = − ½ ، مزید برآں لا اور ما کی حسب ذیل متناظر قیمتیں حاصل ہوتی ہیں ۔

لا = −∞ ، −۳ ، −۲ ، −۱ ، −٫۵ ، ۰ ، ٫۵ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، +∞

ما = −٫۵ ، −٫۶۷ ، −٫۷۵ ، −۱ ، −۱٫۵ ، ±∞ ، ٫۵ ، ۰ ، −٫۲۵ ، −٫۳۳ ، −٫۵

شکل ذیل منحنی کو ظاہر کرتی ہے ۔



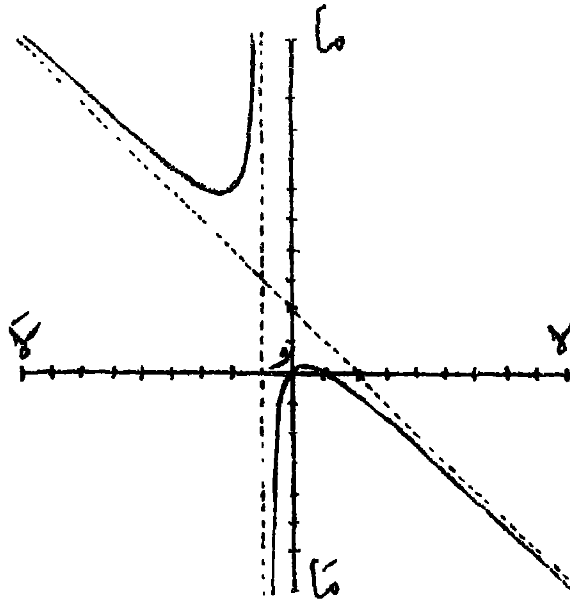
شکل (۱۰)

مثال ۲ ۔　ما = لا(۱ − لا) / (۱ + لا) = − لا + ۲ − ۲ / (۱ + لا)

یہاں لا = ۰ تو ما ≠ ۰ اور لا = ۱ تو بھی ما = ۰، اور لا ← ۰ تو ما ← ± ∞،
نیز ما علامت بدلتا ہے جبکہ لا انہیں سے ہر ایک قیمت میں سے گذرتا ہے۔ لا کی
بڑی قیمتوں کے لئے خواہ منفی ہوں یا مثبت منحنی کی تقریبی شکل

ما = - لا + ۲

ہو جاتی ہے جو ایک خط مستقیم ہے۔ لا ← + ∞ کے لئے یہ منحنی اس خط کے نیچے
واقع ہوتا ہے اور لا ← - ∞ کے لئے اس خط کے اوپر۔ شکل (۱۱) میں اس منحنی کو
دکھایا گیا ہے۔

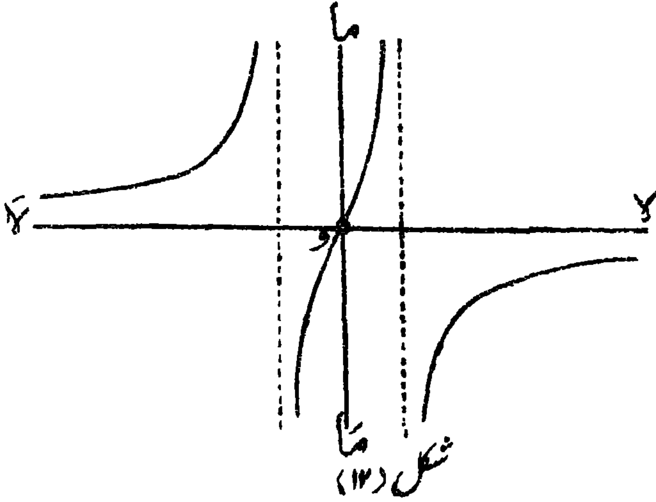


شکل (۱۱)

مثال ۳ -　　ما = ۲ لا ÷ (۱ - لا)۲

یہاں لا = ۰ اور لا ← ± ∞ کے لئے ما معدوم ہو جاتا ہے اور لا ← ± ۱
کے لئے لامتناہی۔ نیز ۱ > لا > ۰ کے لئے ما مثبت ہوتا ہے اور لا > ۱ کیلئے

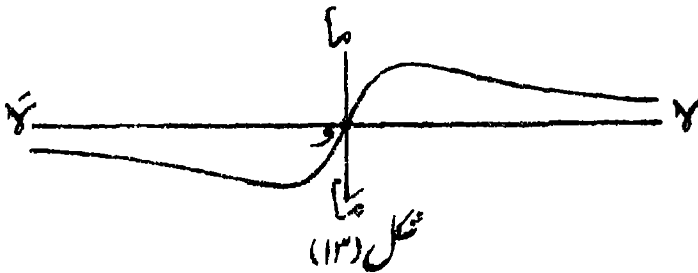
منفی۔ مزید بریں لا کے ساتھ ما علامت بدلتا ہے۔



شکل (۱۲)

مثال ۴۔ $ما = \frac{۲ لا}{۱ + لا^۲}$

پچھلی مثال کی طرح یہاں بھی لا = ۰ اور لا ← ± ∞ کے لئے ما معدوم ہوتا ہے اور لا کے ساتھ علامت بدلتا ہے۔ لیکن نسب نما لا کی کسی حقیقی قیمت کے لئے معدوم نہیں ہوتا اس طرح ما ہمیشہ محدود ہوتا ہے۔



شکل (۱۳)

۱۵۔ دائری تفاعل۔

جب لا، جم لا، مس لا، وغیرہ

کی عام تعریفات علم مثلث کی کسی کتاب سے معلوم ہونگی۔
تفاعل جب لا، لا کی تمام قیمتوں کے لئے مسلسل ہے۔ کیونکہ

مف (جب لا) = جب (لا + مف لا) - جب لا

= ۲ جب $\frac{1}{2}$ مف لا جم (لا + $\frac{1}{2}$ مف لا)

آخری جزو ضربی ہمیشہ محدود ہوتا ہے اور مف لا کو کافی چھوٹا لینے سے حاصل ضرب اس قدر چھوٹا بنایا جاسکتا ہے جسقدر ہم چاہیں۔
اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ جم لا مسلسل ہے۔ یہ نتیجہ بہر کیف قبل الذکر میں مشتمل ہے۔ کیونکہ

جم لا = جب (لا + $\frac{1}{2}$ π)

پھر چونکہ

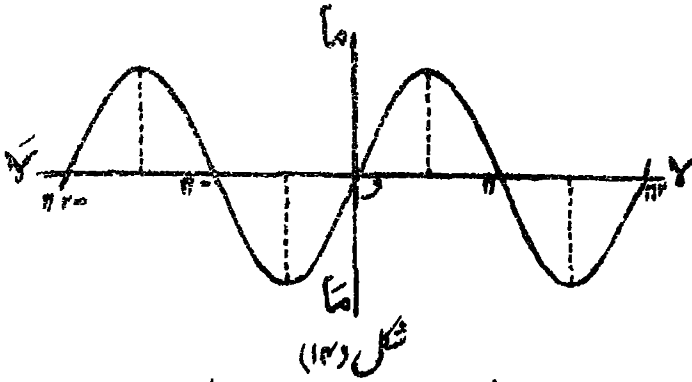
$$\text{مس لا} = \frac{\text{جب لا}}{\text{جم لا}}$$

اور جب لا اور جم لا کا مسلسل ہونا ثابت ہوچکا ہے اس لئے مس لا بھی مسلسل ہے سوائے لا کی ان قیمتوں کے جن کے لئے جم لا = ۰ یہ قیمتیں لا = (ن + $\frac{1}{2}$) π سے حاصل ہوتی ہیں جہاں ن ایک صحیح عدد ہے۔
اسی طرح قط لا، قم لا، ظم لا کی صورتوں پر بحث ہوسکتی ہے۔
صفحہ آیندہ پر جب لا اور مس لا کی ترسیمات بتلائی گئی ہیں۔ طالب علم کو یہ دیکھنا چاہئے کہ کس آسانی سے روابط

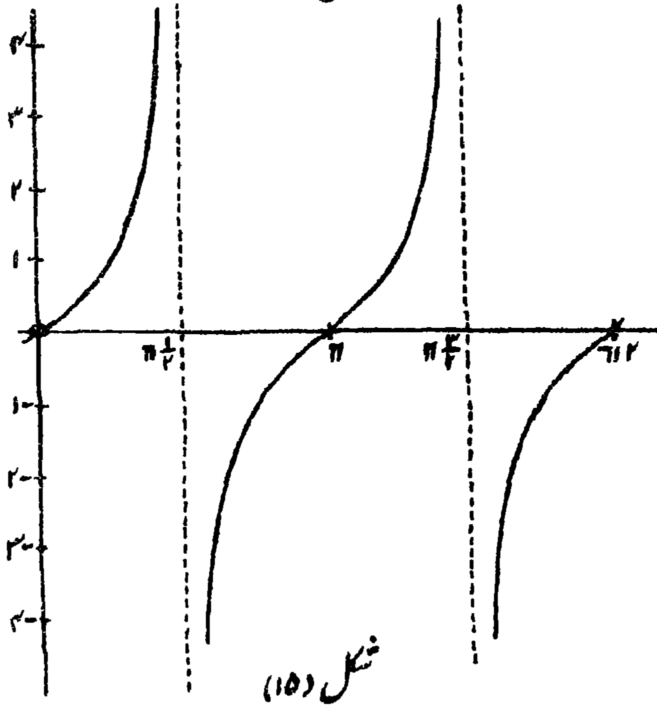
جب (- لا) = - جب لا، جب (π - لا) = جب لا

جب (لا + π) = - جب لا، مس (لا + π) = مس لا

منحنیوں کے تشاکل کو پیش نظر رکھ کر حاصل ہو جاتے ہیں۔



شکل (۱۴)



شکل (۱۵)

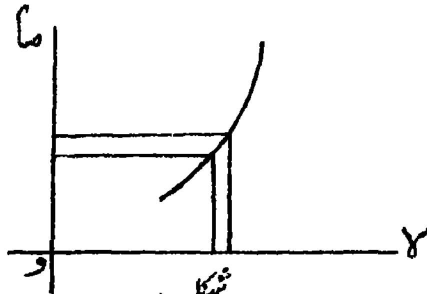
۱۶- مقلوب تفاعل

۹۱

اگر ما، لا کا ایک مسلسل تفاعل ہو تو بعض شرائط کے ماتحت لا، ما کا ایک مسلسل تفاعل ہوگا۔ یہ بات اس وقت ہوگی جبکہ لا کی وسعت ایسے حصوں میں (جو لامتناہی چھوٹے نہ ہوں) تقسیم ہو سکتی ہو کہ ہر ایک حصہ میں تفاعل ما

استقلال کے ساتھ بڑھتا یا گھٹتا ہو جیسے لا بڑھے ہے۔

فرض کرو کہ جس طرح لا، ا سے ب تک بڑھتا ہے ما، عہ سے بہ تک استقلال کے ساتھ بڑھتا ہے تب عہ اور بہ کے درمیان ما کی کسی قیمت کے متناظر ا اور ب کے درمیان لا کی ایک اور صرف ایک قیمت ہوگی۔ پس اگر ہم اس وقفہ کے اندر ہی لا کی قیمتوں سے سروکار رکھیں تو لا،



شکل (۱۶)

ما کا وحید القیمت تفاعل ہوگا۔ نیز یہ ظاہر ہے کہ لا، ما کا ایک مسلسل تفاعل ہے۔ کیونکہ اگر ہم وقفہ مندرجہ بالا کے اندر لا میں کسی مثبت مقدار صہ کا اضافہ کریں تو ما میں بھی ایک محدود مقدار ثہ کا اضافہ ہوگا۔ اور ثہ سے کم مف ما کی تمام قیمتوں کے لئے مف لا < صہ۔ یہی استدلال اسوقت بھی درست ہے جبکہ لا کا اضافہ منفی ہو۔ پس ہم ایک مثبت مقدار ثہ معلوم کرسکتے ہیں اس طرح پر کہ جب صہ کوئی مقررہ مثبت مقدار ہو خواہ یہ کتنی ہی چھوٹی ہو تو |مف لا| < صہ مف ما کی ان تمام قیمتوں کے لئے جن کے لئے |مف ما| < ثہ۔ لیکن یہ لا کے مسلسل ہونے کی شرط ہے جبکہ لا، ما کا ایک تفاعل ہو۔ (دفعہ ۸)

صریحاً ہم اسی نتیجہ پر پہنچتے ہیں جب ما، لا = ا سے لا = ب تک کے وقفہ میں استقلال کے ساتھ گھٹتا ہے۔

اگر ہم اس وقفہ کے پابند نہ رہیں جس میں تفاعل استقلال کے ساتھ بڑھتا یا گھٹتا ہے تو ما کی کسی دی ہوئی قیمت کے متناظر لا کی ایک سے زیادہ قیمتیں ہوسکتی ہیں۔ ایسی صورت میں مقلوب تفاعل کو ہم کثیر القیمت کہینگے۔ نیز یہ بھی ہوسکتا ہے (اور عام طور پر

ہوگا) کہ ما کی خاص وسعتوں میں ما کی قیموں کے متناظر لا کی کوئی قیمتیں حاصل نہ ہوں یعنی مقلوب تفاعل کا وجود نہ ہو۔

اگر ما = ف (لا) .... (۱)

تو مقلوب تفاعلی ربط کو بعض اوقات ہم اس طرح بیان کریںگے:-

لا = ف⁻¹ (ما) .... (۲)

پس ف [ف⁻¹ (ما)] = ف (لا) = ما .... (۳)

یعنی تفاعلی رموز ف اور ف⁻¹ ایک دوسرے کو خارج کر دیتے ہیں۔ ترقیم (۲) کی یہی وجہ ہے۔

مقلوب تفاعل کی ترسیم اصلی تفاعل کی ترسیم سے صرف لا اور ما کے محوروں کا تبادلہ کرنے سے حاصل ہو سکتی ہے۔

مثال ۱۔ فرض کرو کہ ما = لا² یہ لا کا ایک مسلسل تفاعل ہے اور اگر لا مثبت ہو تو لا کے ساتھ مسلسل بڑھتا ہے۔ پس لا = √ما، ما کا ایک مسلسل تفاعل ہے۔ اگر لا علامت کی پابندی نہ کرے تو ما کی ہر قیمت کے متناظر لا کی دو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔ ان کو عام طور پر ±√ما سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ اگر ما منفی ہو تو مقلوب تفاعل √ما کا وجود نہیں ہوتا۔

مثال ۲۔ مقلوب دائری تفاعل

جب⁻¹ لا، جم⁻¹ لا، مس⁻¹ لا، وغیرہ

کثیر القیمت تفاعل ہیں۔

تفاعل جب⁻¹ لا، جم⁻¹ لا کا وجود لا کی صرف ان قیمتوں کے لئے ہے جو ۱- سے ۱+ کے درمیان واقع ہوں لیکن ان حدود کے باہر جو قیمتیں ہوں ان کے لئے ان تفاعلوں کا وجود نہیں۔

تفاعل مس⁻¹ لا، لا کی تمام قیمتوں کے لئے وجود رکھتا ہے یہ کثیر القیمت تفاعل ہے، لا کی قیمتیں ایک حسابی سلسلہ بناتی ہیں جنکا فرق مشترک π ہے۔

جب⁻¹ لا اور مس⁻¹ لا کی ترسیمات اشکال ۲۱، ۲۲ میں بتلائی گئی ہیں۔

۱۷۔ گروہ کی علوی یا سفلی انتہا۔

قبل اس کے کہ ہم مسلسل تفاعلوں کے نظریہ پر مزید بحث کریں 'علوی' اور 'سفلی انتہا' اور 'انتہائی قیمت' کی تعریفات کی جنکا تذکرہ دفعات (۲) اور (۴) میں ہو چکا ہے توسیع کرنا مناسب سمجھتے ہیں۔

سب سے پہلے مقداروں کے ایسے گروہ پر غور کرو جو تعداد میں لا انتہا ہیں لیکن تمام کسی محدود مقدار ب سے کم ہیں۔ گروہ کی تعریف کسی طور پر ہو سکتی ہے لیکن ضرورت اس میں زیادہ تر صرف ایسی کسوٹی کی ہے جس سے ہم یہ معلوم کر سکیں کہ کوئی دی ہوئی مقدار اس گروہ سے متعلق ہے یا نہیں۔ مثلاً ایک گروہ اُن قیمتوں پر مشتمل ہو سکتا ہے جو ایک دیا ہوا تفاعل (مسلسل ہو یا نہ ہو) اختیار کرتا ہے جبکہ متغیر متبوع کسی محدود یا غیر محدود وسعت میں مختلف قیمتیں اختیار کرتا ہے۔

اس قسم کے گروہ میں ممکن ہے کہ "بڑی سے بڑی" مقدار موجود ہو یا نہ ہو یعنی ایسی مقدار جس سے باقی مقداریں تجاوز نہیں کر سکتیں۔ لیکن ہر صورت میں گروہ کی مقدار ب کی ایک 'علوی انتہا' ضرور ہو گی یعنی ایک مقدار ع ایسی موجود ہو گی کہ گروہ کی کوئی مقدار اس سے تجاوز نہ کرتی ہو اور (کم سے کم) ایک مقدار معلوم ہو سکے گی جو گروہ کی کسی ایک ایسی مقدار سے بڑی ہو جو ع سے کم ہو۔ اگر ع خود گروہ سے متعلق مقدار نہ ہو تو اُن مقداروں کی ایک لا انتہا تعداد معلوم ہو سکتی ہے جو کسی ایک ایسی مقدار سے بڑی ہوں جو ع سے کم ہے۔

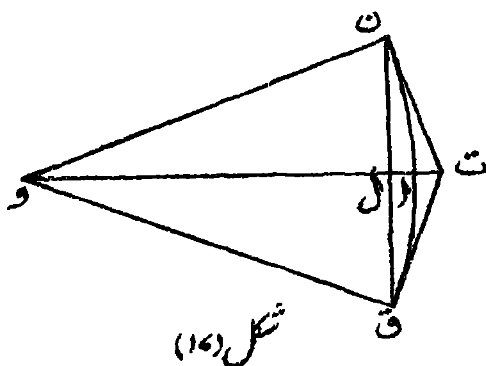
ان بیانات کا ثبوت دفعہ (۲) کی طرح ہندسی تعبیر کی مدد سے مستنبط ہو سکتا ہے۔

اسی طرح اگر مقداروں کا ایک لامتناہی گروہ ہو جن میں سے ہر ایک ایک محدود مقدار ع سے بڑی ہے تو گروہ میں ممکن ہے کہ "کم سے کم" مقدار ہو یا نہ ہو لیکن ہر صورت میں ایک 'سفلی انتہا' ن ہو گی اس طور پر کہ گروہ کی کوئی مقدار ن سے کم نہیں ہوتی حالانکہ اگر کوئی مقدار بھی لیا ہے جو ن سے بڑی ہو تو (کم از کم) ایک مقدار گروہ کی معلوم ہو سکے گی جو اس سے چھوٹی ہو اور اگر ن خود گروہ سے متعلق مقدار نہ ہو تو اُن مقداروں کی لا انتہا تعداد معلوم ہو سکتی ہے جو کسی ایک مقدار سے کم ہوں

جو نما سے بڑی ہے۔

ایک عمدہ مثال دائرہ کے محیط یا گھیرے کی تعریف میں پیش آتی ہے۔
دائرہ کے محیط پر نقطوں کی کوئی تعداد لیکر ان کو ترتیب وار ملایا جائے تو ایک اندرونی کثیرالاضلاع حاصل ہوتا ہے۔ اور اگر ان نقاط پر مماس کھینچے جائیں تو بیرونی یا حائط کثیرالاضلاع ملتا ہے۔ اب یہ آسانی کے ساتھ ثابت ہو جاتا ہے کہ کسی اندرونی کثیرالاضلاع کا گھیرا بیرونی کثیرالاضلاع کے گھیرے سے کم ہے۔ اگر تمام ممکن اندرونی کثیرالاضلاعوں کے کل گروہ پر غور کیا جائے تو گھیروں کی ایک خاص علوی انتہا ہوگی۔ اسی طرح تمام ممکن بیرونی کثیرالاضلاعوں کے گھیروں کی ایک سفلی انتہا ہوگی۔

معہذا ان دونوں انتہاؤں کو ایک ہی ہونا چاہئے۔ کیونکہ فرض کرو کہ ن ق اندرونی کثیرالاضلاع کے گروہ میں سے ایک کا ایک ضلع ہے۔ ن ت اور ق ت نقاط ن اور ق پر مماس ہیں۔



شکل (۱۷)

فرض کرو کہ و مرکز ہے اور ن ق، و ت کو ل پر ملتا ہے۔ تب ن ت اور ق ت بیرونی کثیرالاضلاع کے ضلعوں کے حصے ہوں گے اور اگر ح حاصل جمع کی علامت ہو تو دونوں کثیرالاضلاعوں کے گھیروں کی نسبت ہوگی

۳۲

جا (ن ق) / جا (ت ن + تا ق) = جا (ن ل) / جا (ن ت)

پس ایک مقام مسئلہ کی رو سے اوپر کی نسبت قیمت میں ایں نمونہ

ن ل / ق ن ت ، ت ل / د ن ت

کی نسبتوں کی انتہا [illegible] قیمتوں سے درمیان ہوگی جو کامل شکل میں واقع ہوتی ہیں لیکن جب زاویہ ن و ق کافی چھوٹے لئے جائیں تو کثیر الاضلاع میں ضلعوں کی تعداد میں متناظر اضافہ ہوگا جس کی وجہ سے نسبت د ل / د ن ایک کے اتنا قریب لائی جا سکتی ہے جتنا ہم چاہیں۔ اس لئے متذکرہ بالا علوی اور سفلی انتہائیں وہی ہونی چاہئیں۔

اس معین انتہا کو جس کی طرف ایک اندرونی کثیر الاضلاع (یا بیرونی کثیر الاضلاع) کا گھیرا مائل ہوتا ہے جبکہ وہ دائرہ کے گرد اضلاع کے محاذی بنتے ہیں لا انتہا گھٹائے جاتے ہیں دائرہ کے محیط یا گھیرے کی تعریف کے طور پر اختیار کر لیا جاتا ہے۔ اس امر کا ثبوت کہ اس انتہا کی نسبت دائرہ کے قطر کے ساتھ جسکو (π) سے تعبیر کرتے ہیں تمام دائروں کے لئے وہی ہے علم مثلث کی اکثر کتابوں میں ملے گا۔ دائرہ کی کسی قوس کے طول کے متعلق بھی جو کل گھیرے سے کم ہو اسی طرح کی تعریف دی جا سکتی ہے اور دکھایا جا سکتا ہے کہ یہ یگانہ قیمت رکھتا ہے۔

۱۸۔ مسلسل تفاعل کی ایک بڑی سے بڑی اور ایک چھوٹی سے چھوٹی قیمت ہوتی ہے

مسلسل تفاعل کی ایک اہم خاصیت یہ ہے کہ متغیر کی کسی محدود وسعت میں تفاعل کی ایک بڑی سے بڑی اور ایک چھوٹی سے چھوٹی قیمت ہوتی ہے۔ زیادہ صحت کے ساتھ اس کو یوں بیان کر سکتے ہیں کہ اگر ف ایک تفاعل ہو جو لا = ا سے لا = ب تک مسلسل ہے (بشمول طرفین) اور اس وسعت میں ف جو قیمتیں اختیار کرتا ہے انکی علوی انتہا م ہو تو اس وسعت میں

لا کی ایک ایسی قیمت ضرور ہوگی جس کے لئے فا = مع ـ یہی حال سفلی انتہا کا ہے ـ
ایسے تفاعل کی صورت میں جو زیر بحث وسعت میں استقلال کے ساتھ بڑھتا یا استقلال کے ساتھ گھٹتا ہے یہ مسئلہ خود واضح ہے۔ اس صورت میں بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی قیمتیں سرہائے وسعت کے سروں پر واقع ہوتی ہیں ـ اس لئے یہ مسئلہ توسیعاً اس وقت بھی درست ہے جبکہ تفاعل اس طرح کا ہو کہ وسعت وقفوں کی ایک محدود تعداد میں تقسیم ہوسکے جن میں سے ہر ایک وقفہ میں تفاعل یا تو مسلسل بڑھتا ہے یا مسلسل گھٹتا ہے ـ

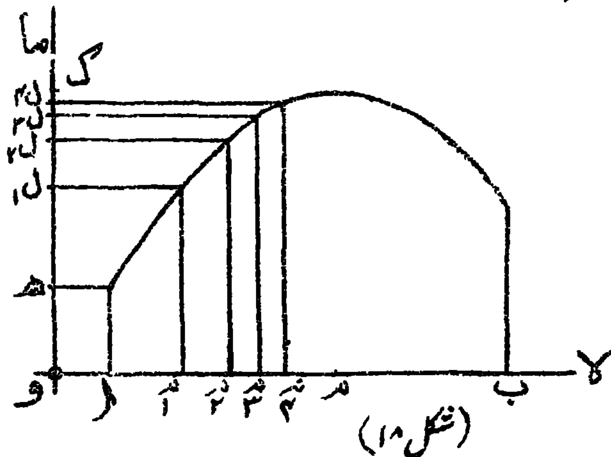
اس مضمون کے استعمالات میں درحقیقت جن تفاعلوں سے ہمیں سابقہ پڑتا ہے ان میں یہ خاصیت پائی جاتی ہے، لیکن وہ اصول جن کی مدد سے کسی دی ہوئی صورت میں ہم اس کی تحقیق کرتے ہیں ایسے استدلال سے قائم کئے جاتے ہیں جس میں دفعہ ہذا کے مسئلہ کی صداقت مان لیجاتی ہے۔ دیکھو دفعہ (۴۸)۔ اس لئے منطق کے نقطۂ نظر سے ایسے ثبوت کا فراہم کرنا بہتر ہوگا جس میں زیر بحث تفاعل سے متعلق کسی چیز کو نہ مان لیا گیا ہو سوائے اس کے کہ وہ بموجب تعریف دفعہ (۸) مسلسل ہے ـ

حسب ذیل اس طرح کے ثبوت کا خاکہ ہے۔ ہندسی تعبیر میں فرض کرو کہ و ا = ا، و ب = ب ـ اگر ا پر فا کی قیمت علوی انتہا مع کے مساوی نہیں ہے تو مع سے کم ہوگی ـ اس کو فا۱ سے تعبیر کرو ـ
لاانتہائی طریقوں سے ہم مقادیر

فا۱، فا۲، فا۳ ....

کا ایک صعودی تواتر معلوم کرسکتے ہیں جس کی علوی انتہا مع ہو۔ مثلاً ہم فا۲ کو فا۱ اور مع کے اوسط حسابی کے مساوی لے سکتے ہیں، فا۳ کو فا۲ اور مع کے اوسط حسابی کے مساوی اور علیٰ ہذا القیاس ـ چونکہ وسعت ا ب میں فا کی قیمت فا۱ سے بڑھکر کوئی مقدار ہوسکتی ہے جو مع سے کم ہو، لا کی کم سے کم ایک قیمت ضرور ہوگی (دفعہ ۹) جس کے لئے فا درمیانی قیمت فا۱ اختیار کرتا ہے ـ فرض کرو

لا۱ اس قیمت کو تعبیر کرتا ہے یا (اگر ایک سے زیادہ ہوں تو) اس طرح کی قیمتوں میں سے سب سے چھوٹی قیمت کو۔



(شکل ۱۸)

اسی طرح فرض کرو کہ لا کی سب سے چھوٹی قیمت لا۲ ہے جس کے لئے ما = ما۲ اور علیٰ ہذا۔
یہ ظاہر ہے کہ مقادیر

لا۱، لا۲، لا۳، ....

(جو شکل میں نقاط م۱، م۲، .... سے تعبیر ہوتے ہیں[۱]) ایک صعودی تواتر میں ہونے چاہئیں۔ فرض کرو کہ اس تواتر کی علوی انتہا م ہے۔ اب چونکہ م کے بائیں جانب کسی وسعت میں خواہ یہ کتنی ہی چھوٹی ہو ایسے نقاط ہوتے ہیں جن پر ما، مما سے اس قدر فرق رکھتا ہے جو کسی مقررہ مقدار سے کم ہے تفاعل کے تسلسل سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ خود نقطہ م پر ما کی قیمت مما کے سوا کوئی اور نہیں ہو سکتی۔

[۱ شکل صرف وضاحت کی خاطر کھینچی گئی ہے اور ثبوت کے لئے ضروری نہیں۔ درحقیقت یہ ظاہر ہے کہ جس تفاعل کو ٹھیک طور پر ترسیمی طور پر تعبیر کیا جا سکتا ہے اس میں اس خاصیت کا ہونا ضروری ہے اور اوپر کا ثبوت اس کی صورت میں غیر ضروری ہوگا۔

شکل میں وک = مما، وھ = ما۱، ول۱ = ما۲، ول۲ = ما۳ .... اور تواتر

ما۱، ما۲، ما۳، ....

کو متذکرہ بالا طریقہ سے حاصل کرنے میں ل۱، ھ ک کی تنصیف کرتا ہے، ل۲، ل۱ ک کی

تنصیف کرتا ہے، ل، ن، ک کی تنصیف کرتا ہے اور علی ہذا -]

۲ اب یہ دیکھنے کے لئے کہ غیر مسلسل تفاعلوں کی صورت میں مسئلہ بالا عام طور پر صادق نہیں آتا ایسے تفاعل پر غور کرو جو اس طرح حاصل ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ صفر کے سوا لا کی اور قیمتوں کے لئے تفاعل کی قیمت جیب لا ہے اور لا = ۰ کے لئے تفاعل کی قیمت فرض کرو صفر ہوتی ہے۔ اب تفاعل کی علوی انتہا ا ہے جس کی طرف (لا) کو کافی چھوٹا لینے سے تفاعل قریب لایا جا سکتا ہے جس قدر ہم چاہیں لیکن یہ کبھی اس انتہا کو نہیں پہنچتا۔

۱۹۔ تفاعل کی انتہائی قیمت ۔ ان قیمتوں کے کل گروہ پر غور کرو جو ایک تفاعل ما (مسلسل یا غیر مسلسل) اختیار کرتا ہے جبکہ متغیر متبوع لا ایک ثابت قیمت لا₁ کے ایک جانب کے کسی وقفہ میں مختلف قیمتیں اختیار کرتا ہے۔ فرض کرو جس طرح لا، لا₁ کے قریب آتا ہے ما کسی ثابت مقدار لہ کے قریب اس طرح آتا ہے کہ (لا - لا₁) کو کافی طور پر چھوٹا لینے سے اس بات کا یقین ہو سکتا ہے کہ (لا - لا₁) کی اس قیمت یا اس سے چھوٹی قیمتوں کے لئے |ما - لہ| کی قیمت ش سے کم ہوتی ہے جہاں ش ایک کوئی مقررہ مقدار ہو سکتی ہے خواہ کتنی ہی چھوٹی ہو۔ ان شرائط کے تحت ہم کہتے ہیں کہ لہ، ما کی انتہائی قیمت ہے جبکہ لا زیر بحث جانب سے لا₁ کے قریب آئے۔

اس ربط کو اس طرح ظاہر کرتے ہیں۔

نہا (لا ← لا₁) ما = لہ

لیکن ٹھیک صحت تو اس میں ہے کہ اس کی تخصیص بھی کر دی جائے کہ لا، لا₁ کے کس جانب سے قریب آ رہا ہے۔

متذکرہ بالا ربط کے ساتھ دفعہ (۹) کی تعریف پر غور کریں تو ہم دیکھتے ہیں کہ ایک مسلسل تفاعل کی صورت میں

نہا (لا ← لا₁) ف (لا) = ف (لا₁) . . . . . (۱)

حاصل ہوتا ہے۔ یعنے تفاعل کی انتہائی قیمت خود تفاعل کی قیمت پر منطبق ہوتی ہے اور یہ کہ اگر لا متغیر متبوع کی وسعت کے اندر واقع ہو تو لا خواہ کسی جانب سے لا کے قریب آئے یہ خاصیت درست ہے۔ لیکن اگر لا وسعت کے کسی سرے پر منطبق ہو تو لا کا وسعت کے اندر سے لا کے قریب آنا ضروری ہے۔

برعکس اس کے جب تک شرط (۱) پوری نہ ہو تفاعل مسلسل نہیں ہو سکتا۔

اب ایسے تفاعل پر غور کرو جس کے متغیر متبوع کی وسعت مثبت لا کی سمت میں غیر محدود ہے۔ اگر لا کو مسلسل بڑھانے سے ما ایک ثابت قیمت لہ کی طرف مائل ہو اس طرح کہ لا کو کافی بڑا لینے سے ہم یہ یقین کر سکیں کہ لا کی اس قیمت اور اس سے بڑی قیمتوں کے لئے |ما - لہ| ثما سے چھوٹا ہوگا جہاں ثما کوئی مقررہ مثبت مقدار ہے خواہ کتنی ہی چھوٹی ہو، تب لا ← ∞ کے لئے لہ کو ما کی انتہائی قیمت کہتے ہیں اور ہم لکھتے ہیں

$$\text{نہا}_{\text{لا} \to \infty} \text{ما} = \text{لہ}$$

اسی طرح کی تعریف

$$\text{نہا}_{\text{لا} \to -\infty} = \text{ما}$$

کی ہے جب یہ موجود ہو اور تفاعل کے متغیر متبوع کی وسعت منفی لا کی سمت میں غیر محدود ہو۔ ۳۵

۲۰۔ انتہائی قیمتوں سے متعلق عام مسائل۔

۱۔ تفاعلوں کے کسی محدود تعداد کے مجموعہ کی انتہائی قیمت ان تفاعلوں کی انتہائی قیمتوں کے مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے بشرطیکہ یہ تمام انتہائی قیمتیں محدود ہوں۔

۲۔ تفاعلوں کے کسی محدود تعداد کے حاصل ضرب کی انتہائی قیمت ان تفاعلوں کی انتہائی قیمتوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتی ہے بشرطیکہ یہ تمام

انتہائی قیمتیں محدود ہوں۔

۳۔ دو تفاعلوں کے خارج قسمت کی انتہائی قیمت ان تفاعلوں کی انتہائی قیمتوں کے خارج قسمت کے مساوی ہوتی ہے بشرطیکہ یہ انتہائی قیمتیں محدود ہوں اور مقسوم علیہ صفر نہ ہو۔

ان مسائل کے ثبوت کا طریقہ وہی ہے جو دفعہ (۱۲) میں دیا گیا ہے۔ اس دفعہ کے مسائل بالا کی خاص صورتیں ہیں۔

مثلاً فرض کرو کہ لا کے دو تفاعل ع، ق ہیں اور جب طرح لا، ذ کے قریب آتا ہے ان تفاعلوں کی انتہائی قیمتیں علی الترتیب عہ، قہ حاصل ہوتی ہیں۔ تب اگر ہم

ع = عہ + عما، ق = قہ + بما

لکھیں تو عما اور بما، لا کے تفاعل ہوں گے جن کی انتہائی قیمتیں صفر ہیں۔

اب

(ع + ق) − (عہ + قہ) = عما + بما،

ع ق − عہ قہ = عہ بما + قہ عما + عما بما،

ع/ق − عہ/قہ = (قہ عما − عہ بما) / (قہ (قہ + بما))،

اور دفعہ (۱۲) کی طرح لا کو کافی طور پر ذ کے قریب لا کر ہم مذکورہ بالا شرائط کے تحت بائیں طرف کو مطلق قیمت میں کسی مقررہ مقدار سے چھوٹی بنا سکتے ہیں خواہ یہ مقدار کتنی ہی چھوٹی ہو۔

۲۱۔ مثالیں۔

ہم نے دفعہ (۱۹) میں یہ دیکھا ہے کہ ایک مسلسل تفاعل کی انتہائی قیمت متغیر متبوعہ لا کی کسی قیمت ا کے لئے خود تفاعل کی قیمت ہوتی ہے بشرطیکہ لا کی ایسی قیمت کے لئے تفاعل کی قیمت موجود ہو۔ لیکن متغیر متبوعہ کی چند تنہا یا مروں پر کی قیمتوں کے لئے یہ ممکن ہے کہ تفاعل کا وجود نہ ہو یا تفاعل غیر معین ہو جائے حالانکہ لا کی ان قیمتوں کے لئے جو ان قیمتوں سے لا انتہا مقلیل

فرق رکھتی ہیں تفاعل موجود ہو۔ یہی وہ صورتیں ہیں جنمیں "انتہائی قیمت" کا تخیل زیادہ اہم ہو جاتا ہے۔

مثال ۱۔ تفاعل

$$\frac{1-\sqrt{1-\text{لا}^2}}{\text{لا}^2}$$

یہاں ±۱ کے درمیان لا کی کسی نسبت کے لئے تمام جبری اعمال جاری ہو سکتے ہیں سوائے اس صورت کے جبکہ لا کی قیمت صفر لیجائے۔ اس صورت میں کسر کی شکل $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ہو جاتی ہے۔ اب خارج قسمت $\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$ کی یہ تعریف ہے کہ اگر اس کو ب سے ضرب دیا جائے تو ا حاصل ہو اور چونکہ کسی محدود مقدار کو صفر سے ضرب دینے سے صفر حاصل ہوتا ہے اس لئے یہ ظاہر ہے کہ $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ کی کوئی قیمت ہو سکتی ہے یہی وجہ ہے کہ اس کو "غیر معین" کہتے ہیں۔

بہرکیف دی ہوئی کسر کے شمار کنندہ اور نسب نما کو $1+\sqrt{1-\text{لا}^2}$ سے ضرب دیکر ہم اس کو اس شکل

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{لا}^2\left\{1+\sqrt{1-\text{لا}^2}\right\}}$$

میں رکھ سکتے ہیں، اور یہ کسر ±۱ کے درمیان لا کی تمام قیمتوں کے لئے سوائے صفر قیمت کے

$$\frac{1}{1+\sqrt{1-\text{لا}^2}}$$

کے مساوی ہے۔ اب چونکہ یہ تفاعل مسلسل ہے اور لا = ۰ کے لئے اس کا وجود ہے اس لئے لا → ۰ کے لئے اس کی انتہائی قیمت $\frac{1}{2}$ ہے۔

مثال ۲۔ تفاعل

$$\sqrt{1+\text{لا}}-\sqrt{\text{لا}}$$

پر غور کرو۔ یہاں جس طرح لا مسلسل بڑھتا ہے یہ تفاعل غیر معین شکل ∞-∞ اختیار کرنے پر مائل ہوتا ہے۔ لیکن تفاعل کو

$$\frac{1}{\sqrt{لا}+\sqrt{لا+1}}$$

کی متماثل شکل میں رکھنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ لا ← ∞ کے لئے اس کی انتہائی قیمت صفر ہو جاتی ہے۔

مثال ۳۔ دئے ہوئے رقاص کے اہتزاز کے دور کو سعت ع کا تفاعل قرار دیں۔ تو صفر اور ۲π کے درمیان ع کی تمام قیمتوں کے لئے دور کی ایک خاص قیمت ہوتی ہے لیکن ع کی انتہائی قیمتیں صفر اور ۲π لینے پر اس کا وجود نہیں ہوتا۔ بہرکیف جس طرح ع صفر کے قریب آتا ہے دور ایک خاص انتہائی قیمت کی طرف مائل ہوتا ہے۔ اس انتہائی قیمت کو علم حرکت میں اس طور پر موسوم کیا جاتا ہے "کہ یہ لا انتہا چھوٹی قوس میں اہتزاز کا وقت ہے"

۲۳ ۔ چند خاص انتہائی قیمتیں ۔

حسب ذیل مثالیں تفرقی احصا میں خاص اہمیت رکھتی ہیں۔

۱۔ م کی تمام منطق قیمتوں کے لئے

$$\text{نہا}_{لا\to ا}\frac{لا^م - ا^م}{لا - ا} = م\,ا^{م-1} \quad ....(1)$$

اگر م مثبت صحیح عدد ہو تو

$$\text{نہا}_{لا\to ا}\frac{لا^م - ا^م}{لا - ا} = \text{نہا}_{لا\to ا}\left(لا^{م-1} + ا\,لا^{م-2} + ... + ا^{م-2}لا + ا^{م-1}\right)$$
$$= م\,ا^{م-1}$$

کیونکہ ارقام کی تعداد (م) محدود ہے اس لئے مجموعہ کی انتہائی قیمت مختلف ارقام کی انتہائی قیمتوں کے مجموعہ کے مساوی ہے (دفعہ ۲۰)۔

اگر م منطق کسر ہو تو فرض کرو کہ یہ کسر $\frac{\text{پ}}{\text{ق}}$ ہے۔ نیز فرض کرو کہ

$$\text{لا} = \text{ما}^{\text{ق}} ،\quad \text{ا} = \text{ب}^{\text{ق}}$$

تو

$$\frac{\text{لا}^{\text{م}} - \text{ا}^{\text{م}}}{\text{لا} - \text{ا}} = \frac{\text{ما}^{\text{مق}} - \text{ب}^{\text{مق}}}{\text{ما}^{\text{ق}} - \text{ب}^{\text{ق}}} = \frac{\text{ما}^{\text{پ}} - \text{ب}^{\text{پ}}}{\text{ما}^{\text{ق}} - \text{ب}^{\text{ق}}}$$

یہ کسر

$$\frac{\dfrac{\text{ما}^{\text{پ}} - \text{ب}^{\text{پ}}}{\text{ما} - \text{ب}}}{\dfrac{\text{ما}^{\text{ق}} - \text{ب}^{\text{ق}}}{\text{ما} - \text{ب}}}$$

کے مساوی ہے۔ پہلی صورت سے اس کسر کے شمار کنندہ کی انتہائی قیمت $\text{پ ب}^{\text{پ}-۱}$ اور نسب نما کی انتہائی قیمت $\text{ق ب}^{\text{ق}-۱}$ ہے۔ اسلئے مطلوبہ انتہا

$$\frac{\text{پ}}{\text{ق}}\ \text{ب}^{\text{پ}-\text{ق}} = \frac{\text{پ}}{\text{ق}}\ \text{ا}^{\frac{\text{پ}}{\text{ق}}-۱} = \text{م ا}^{\text{م}-۱}$$

ہے جو دی ہے۔

ب۔ اگر م منفی ہو تو فرض کرو کہ م = − ن جس سے

$$\frac{\text{لا}^{\text{م}} - \text{ا}^{\text{م}}}{\text{لا} - \text{ا}} = \frac{\text{لا}^{-\text{ن}} - \text{ا}^{-\text{ن}}}{\text{لا} - \text{ا}} = - \frac{۱}{\text{لا}^{\text{ن}}\,\text{ا}^{\text{ن}}} \times \frac{\text{لا}^{\text{ن}} - \text{ا}^{\text{ن}}}{\text{لا} - \text{ا}}$$

اگر ن منطق ہو تو اس کی انتہائی قیمت پچھلی صورتوں کی مدد سے

$$- \frac{۱}{\text{ا}^{۲\text{ن}}} \times \text{ن ا}^{\text{ن}-۱} = - \text{ن ا}^{-\text{ن}-۱} = \text{م ا}^{\text{م}-۱}$$

ہے۔

۲۔ یہ ثابت کرنا مطلوب ہے کہ

$$\underset{ط\to}{\text{نہا}}\ \frac{\text{جب ط}}{\text{ط}} = ۱ ،\ \underset{ط\to}{\text{نہا}}\ \frac{\text{مس ط}}{\text{ط}} = ۱ \ldots\ldots (۲)$$

اگر ہم دائرہ کی قوس کے "طول" کی تعریف (دفعہ ۱۷) کی طرف رجوع کریں تو ان بیانات کی صداقت خود بخود واضح ہو جاتی ہے۔ شکل (۱۷) میں اگر زاویہ ن و ق چار قائموں کا $\frac{۱}{ن}$ ہو تو ن × ن ق، ن ضلعوں والے اندرونی منتظم کثیر الاضلاع کا گھیرا ہوگا اور ن (ت ن + ت ق) متناظر حائط کثیر الاضلاع کا گھیرا ہوگا۔ اب اگر

$$\text{ط} = \angle\, \text{ن و ا} = \frac{\pi}{\text{ن}}$$

تو
$$\frac{\text{وتر ن ق}}{\text{قوس ن ق}} = \frac{\text{ن ل}}{\text{قوس ن ا}} = \frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}$$

اور
$$\frac{\text{ت ن + ت ق}}{\text{قوس ن ق}} = \frac{\text{ن ت}}{\text{قوس ن ا}} = \frac{\text{مس ط}}{\text{ط}}$$

پس کسور

$$\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{مس ط}}{\text{ط}}$$

سے وہ نسبتیں تعبیر ہوتی ہیں جو متذکرہ بالا کثیر الاضلاع کے گھیروں کو بالترتیب دائرہ کے گھیرے سے ہیں۔ پس ن جب مسلسل بڑھتا ہے تو ہر کسر انتہائی قیمت میں اکائی کی طرف مائل ہوتی ہے (دفعہ ۱۷)۔

استدلال بالا میں یہ مان لیا گیا ہے کہ ط، π کا زیر اضعاف ہے۔ لیکن شکل میں زاویہ ن و ق کی قیمت کچھ ہی ہو ہر صورت میں

$$\text{وتر ن ق} < \text{قوس ن ق} \quad \text{اور} \quad \text{ت ن + ت ق} > \text{قوس ن ق}$$

یعنی $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}} < ۱$ اور $\frac{\text{مس ط}}{\text{ط}} > ۱$ ۔ پس ان کسروں کی علی الترتیب اوپر کی اور نیچے کی انتہا ہونی چاہیے اور متذکرہ بالا سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ یہ انتہائیں اکائی کے سوا کچھ اور نہیں ہو سکتیں۔

ذیل کی عددی جدول سے یہ معلوم ہوگا کہ کس طرح متذکرہ بالا تفاعل طہ کو مسلسل گھٹانے سے اپنی مشترک انتہا کے قریب آتے ہیں۔

ن	طہ / π	جب طہ / طہ	مس طہ / طہ
۴	٫۲۵	٫۹۰۰۳۲	۱٫۲۷۳۲۴
۵	٫۲۰	٫۹۳۵۴۹	۱٫۱۵۶۳۳
۱۰	٫۱۰	٫۹۸۳۶۳	۱٫۰۳۴۲۵
۲۰	٫۰۵	٫۹۹۵۸۹	۱٫۰۰۸۳۱
۴۰	٫۰۲۵	٫۹۹۸۹۷	۱٫۰۰۲۰۶
∞	٫۰	۱٫۰۰۰۰۰	۱٫۰۰۰۰۰

تیسرے اور چوتھے خانوں میں وہ نسبتیں درج ہیں جو ن ضلعوں والے اندرونی اور بیرونی یا حائط منتظم کثیر الاضلاع کے گھیروں کو بالترتیب دائرہ کے گھیرے سے ہیں۔

۳۹

۲۳۔ صغاریات۔ جب کوئی متغیر مقدار کسی عمل میں انتہائی قیمت صفر کی طرف مائل ہوتی ہے تو ہم کہتے ہیں کہ یہ مقدار آخر کار معدوم ہو جاتی ہے یا 'لا انتہا چھوٹی' ہے۔

دو لا انتہا چھوٹی مقداریں مساوی کہلاتی ہیں جب ایک کو دوسری سے جو نسبت ہے اسکی انتہائی قیمت ایک ہو۔ مثلاً طہ، جب طہ صفر انتہا کی طرف مائل ہوتا ہے تو جب طہ اور طہ آخر کار مساوی ہو جاتے ہیں (دفعہ ۲۲ مثال ۲)۔

لا انتہا چھوٹی مقداروں کے رتبوں میں تمیز کرنا بعض اوقات ضروری ہو جاتا ہے پس اگر ع، ف دو مقداریں ہوں جو صفر کی طرف مائل ہوتی ہیں اور اگر نسبت ف/ع محدود ہو اور صفر نہ ہو تو یہ کہا جاتا ہے کہ ف لا انتہا چھوٹی مقدار ہے جسکا

رتبہ وہی ہے جو ع کا ہے۔ لیکن اگر نسبت $\frac{و}{ع}$ صفر کے مساوی ہو جائے تو ہم کہتے ہیں کہ و لا انتہا چھوٹی مقدار ہے مگر اس کا رتبہ ع کے رتبہ سے بڑا ہے۔
اگر $\frac{و}{ع^م}$ کی انتہا محدود ہو اور صفر نہ ہو تو و کو م ویں رتبہ کا صغاری کہتے ہیں جبکہ ع کو معیار قرار دیا جائے۔

مثال ۱۔ شکل ۱ میں جب زاویہ ن و ق کو لا انتہا گھٹا دیا جائے تو ل ا اور ا ت آخر کار مساوی ہو جاتے ہیں۔ کیونکہ متشابہ مثلثوں کی مدد سے

$$\frac{و ن}{و ل} = \frac{و ت}{و ن}$$

اور اس لئے $$\frac{و ن - و ل}{و ل} = \frac{و ت - و ن}{و ن}$$

یا $$\frac{ل ا}{ا ت} = \frac{و ل}{و ن}$$

اور نسبت $\frac{و ل}{و ن}$ کی انتہائی قیمت ایک ہے۔

پھر ل ت دوسرے رتبہ کا صغاری ہے اگر ن ل معیار قرار دیا جائے کیونکہ

$$ن ل^۲ = و ل \times ل ت$$

جس سے $$\frac{ل ت}{ن ل^۲} = \frac{۱}{و ل} = \frac{۱}{و ا} \quad (\text{انتہا میں})$$

مثال ۲۔ ہم جانتے ہیں کہ

$$۱ - جم\ طہ = ۲\ جب^۲ \frac{۱}{۲} طہ = \left(\frac{جب \frac{۱}{۲} طہ}{\frac{۱}{۲} طہ}\right)^۲ \times \frac{۱}{۲} طہ^۲ \ldots\ldots (۱)$$

جب طہ ← ۰ پہلے جزو ضربی کی انتہا ایک ہے۔ اس لئے ۱ ـ جم طہ دوسرے رتبہ کا صغاری ہے جبکہ معیار طہ ہو۔

پھر

$$\text{مس ط} - \text{جب ط} = \left(\frac{\text{جب}\ \tfrac{1}{2}\text{ط}}{\tfrac{1}{2}\text{ط}}\right)^{3} \times \frac{\text{جم}\ \tfrac{1}{2}\text{ط}}{\text{جم ط}} \times \frac{1}{2}\text{ط}^{3} \quad \ldots (2)$$

۲۰ جب ط ← ۰ تو پہلے دو اجزائے ضربی میں سے ہر ایک انتہا ۱ کی طرف مائل ہوتا ہے۔ پس مس ط - جب ط تیسرے رتبہ کا صغاری ہے۔ شکل میں اس کو یوں بیان کیا جاسکتا ہے کہ ن ت - ن ل آخرکار تیسرے رتبہ کا ہے جبکہ ن ل معیار ہو۔

اصول ذیل کو پیش نظر رکھ کر ہم مختلف دلیلوں کو اختصار کے ساتھ بیان کر سکتے ہیں خصوصاً ایسی صورتوں میں جبکہ احصا کو ہندسہ اور علم حیل میں استعمال کیا جائے۔

اگر ع_1 اور ب_1 ایک ہی رتبہ کے دو صغاریات ہوں اور اگر $\bar{\text{ع}}_1$ اور $\bar{\text{ب}}_1$ دوسرے صغاریات ہوں جو آخرکار بالترتیب ع_1 اور ب_1 کے مساوی ہو جائیں تو

$$\text{نہا}\left(\frac{\bar{\text{ع}}_1}{\bar{\text{ب}}_1}\right) = \text{نہا}\left(\frac{\text{ع}_1}{\text{ب}_1}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

کیونکہ

$$\frac{\bar{\text{ع}}_1}{\bar{\text{ب}}_1} = \frac{\bar{\text{ع}}_1}{\text{ع}_1} \times \frac{\text{ب}_1}{\bar{\text{ب}}_1} \times \frac{\text{ع}_1}{\text{ب}_1} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

اور بائیں طرف کے پہلے دو اجزائے ضربی کی انتہائیں بموجب فرض ایک کے مساوی ہیں۔ دفعہ ۲۰ سے نتیجہ زیر بحث حاصل ہو جاتا ہے*۔

جب کوئی متغیر مقدار دوران عمل میں بالآخر کسی بالتعین مقدار سے بھی بڑھ جاتی ہو تو اس کو 'لاانتہا بڑی' مقدار کہا جاتا ہے۔ اور اگر اس قسم کی کسی مقدار ع کو معیار قرار دیا جائے تو کسی دوسری مقدار ق کو 'م' ویں رتبہ کی لاانتہا بڑی مقدار کہا جاتا ہے جبکہ $\frac{\text{ق}}{\text{ع}^{\text{م}}}$ کی انتہا محدود ہو اور صفر نہ ہو۔

امثلہ نمبری ۱

(جبری تفاعل)

۱۔ ایک ہی شکل میں $\text{لا}^{\text{ن}}$ کی ترسیمات حسب ذیل صورتوں میں معلوم کرو:۔

* اس اصول کے استعمال کی اچھی مثال دفعہ ۶۳ میں ملے گی۔

$ن = ۱، ۲، ۳، \frac{۱}{۲}، \frac{۱}{۳}$

جبکہ لا کی وسعت ۰ سے ۱ء۲ تک ہو*

۲۔ (۱) $(لا - ۱)(لا - ۲)$ ، $لا^{۲} - لا + ۱$

(۲) $لا(۱ - لا)^{۲}$ ، $لا^{۲}(۱ - لا)^{۲}$

(۳) $لا + \frac{۱}{لا}$ ، $لا - \frac{۱}{لا}$

(۴) $\sqrt{۱ - لا^{۲}}$ ، $\frac{۱}{\sqrt{۱ - لا^{۲}}}$

(۵) $\frac{(لا - ۱)(لا - ۲)}{لا}$ ، $\frac{(لا - ۱)(لا - ۳)}{لا - ۲}$

(۶) $\frac{لا^{۲}}{۱ - لا^{۲}}$ ، $\frac{لا^{۲}}{۱ + لا^{۲}}$

(۷) $\frac{۱ - لا + لا^{۲}}{۱ + لا + لا^{۲}}$

(۸) $\frac{لا}{۱ - لا}$ ، $\frac{لا}{(۱ - لا)^{۲}}$

کی ترسیمات کھینچو۔

۳۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$۲لا^{۳} + ۵لا^{۲} - ۵لا - ۳ = ۰$$

کی ایک اصل $-\infty$ اور -۱ کے درمیان، دوسری اصل -۱ اور صفر کے درمیان اور تیسری اصل ۱ اور ۲ کے درمیان ہے۔

* پیمانہ کے مناسب منحنیوں کو بہت احتیاط سے کھینچنا چاہیے۔ اس مقصد کے لئے چھوٹے مربعوں والے مربع دار کاغذ کا استعمال مفید ثابت ہوگا۔ ضمیمہ میں (ا، ب، ج جدولوں میں) اعداد کے مربع، جذر المربع، اور ان کے متقابل دئے گئے ہیں جن سے حسابی عمل میں بعض اوقات آسانی پیدا ہو جائے گی۔

۴ـ ثابت کرو کہ مساوات

$۲ لا^۳ + ۷ لا^۲ + ۳ لا - ۵ = ۰$

کی تین حقیقی اصلیں ہیں۔ تقریبی طور پر ان کے مقامات معلوم کرو۔

۵ـ مساوات $۲ لا^۳ - ۳ لا^۲ - ۳۶ لا + ۱۰ = ۰$

کی اصلوں کے مقامات کی تعیین تقریبی طور پر کرو۔

۶ـ ثابت کرو کہ طاق درجے کی ہر جبری مساوات کی کم سے کم ایک اصل حقیقی ہوتی ہے اور جفت درجے کی ہر مساوات میں جس کی پہلی اور آخری رقموں کے سر مختلف العلامت ہوں کم سے کم دو حقیقی اصلیں ہوتی ہیں جن میں سے ایک مثبت اور دوسری منفی ہوتی ہے۔

امثلہ نمبری ۲

(دائری تفاعل)

۱ـ تفاعیل ذیل کی ترسیمیں کھینچو:-

(۱) تم لا، ہم لا، ہم لا + سس لا،

(۲) جب^۲ لا، جم^۲ لا، سس^۲ لا،

(۳) جب لا + جب ۲ لا، جب لا + جم ۲ لا،

(۴) جب لا^۲، جب |لا|، جب $\frac{۱}{لا}$،

۲ـ ثابت کرو کہ مساوات

جب لا - لا جم لا = ۰

کی ایک اصل π اور $\frac{۳}{۲}\pi$ کے درمیان واقع ہوتی ہے۔

امثلہ نمبری ۳

(تواتر)

۱ـ مقادیر

$$\frac{۲ ن}{ن^۲ + ۱}$$

کی علوی اور سفلی انتہائیں معلوم کرو جبکہ ن = ۱، ۲، ۳، ....

۲۔ اگر تواتر

$$ا_1،\ ا_2،\ ا_3 \ldots\ldots ا_ن، \ldots\ldots$$

میں

$$ا_{ن+1} = م\, ا_ن + ج$$

جہاں م اور ج مثبت ہیں اور م < ۱ تو تواتر کی انتہا $\frac{ج}{1-م}$ ہوگی خواہ $ا_1$ کی کچھ ہی قیمت ہو۔

۳۔ مقادیر

$$\sqrt{2}،\ \sqrt{2+\sqrt{2}}،\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}، \ldots\ldots$$

جہاں

$$ا_{ن+1} = \sqrt{2 + ا_ن}$$

ایک صعودی تواتر بناتی ہیں جس کی انتہا ۲ ہے۔

۴۔ اگر

$$ا_{ن+1} = \sqrt{ک + ا_ن}$$

جہاں $ا_1$ اور ک مثبت ہیں تو تواتر صعودی یا نزولی ہوگا بموجب اس کے کہ $ا_1$ مساوات $لا^2 = لا + ک$ کی مثبت اصل سے چھوٹا یا بڑا ہو اور ہر صورت میں اس کی انتہا یہ اصل ہو

۵۔ تواتر کی نوعیت کی جانچ کرو جس میں

$$ا_{ن+1} = \frac{ک}{1 + ا_ن}$$

جہاں ک مثبت ہے۔ ثابت کرو کہ اگر $ا_1$ مثبت ہو تو تواتر کی انتہا، مساوات $لا^2 + لا = ک$ کی مثبت اصل ہے۔

۶۔ ایسی مقداروں کا تواتر معلوم کرو جو مساوات

$$لا^3 = لا + 1$$

کی مثبت اصل کے قریب آئیں۔

۷۔ ثابت کرو کہ قانون

$$\text{لا}_{\text{ن}+1} = \text{سس}^{-1}\,\text{لا}_{\text{ن}}$$

کے بموجب بننے والے تواتر کی انتہا مساوات سس لا = لا کی اقل مثبت اصل ہے جہاں لا_1 اور ۲ کے درمیان واقع ہوتا ہے۔

۸۔ اگر $\text{ا}_{\text{ن}}$ اور $\text{ب}_{\text{ن}}$ کے درمیان حسابی اور موسیقی اوسط بالترتیب $\text{ا}_{\text{ن}+1}$، $\text{ب}_{\text{ن}+1}$ ہوں اور ا_1 اور ب_1 مثبت ہوں تو ایسے تواتروں کی مشترک انتہا $\sqrt{\text{ا}_1\,\text{ب}_1}$ ہوتی ہے جن کی ن ویں ارقام بالترتیب $\text{ا}_{\text{ن}}$ اور $\text{ب}_{\text{ن}}$ ہیں۔

۴۳

۹۔ اگر $\text{ا}_{\text{ن}+1} = \frac{1}{2}(\text{ا}_{\text{ن}} + \text{ب}_{\text{ن}})$ ، $\text{ب}_{\text{ن}+1} = \sqrt{\text{ا}_{\text{ن}}\,\text{ب}_{\text{ن}}}$

اور ا_1، ب_1 مثبت ہوں تو تواترین کی ن ویں ارقام $\text{ا}_{\text{ن}}$، $\text{ب}_{\text{ن}}$ ہیں ایک مشترک انتہا کی طرف مستدق ہوتے ہیں۔

(اس انتہا کو ا_1 اور ب_1 کے درمیان حسابی ہندسی اوسط کہتے ہیں)

امثلہ نمبری ۴
(تفاعلوں کی انتہائی قیمتیں)

۱۔ لا ← ۰ کے لئے

$$\frac{\text{جب ا لا}}{\text{لا}} \ ، \ \frac{\text{سس ا لا}}{\text{لا}}$$

کی انتہائی قیمتیں معلوم کرو۔

۲۔ لا ← ۰ کے لئے

$$\frac{\text{جب}^{-1}\,\text{لا}}{\text{لا}} \ ، \ \frac{\text{سس}^{-1}\,\text{لا}}{\text{لا}}$$

کی انتہائی قیمتیں معلوم کرو۔

۳۔ $\text{ما} = \frac{\text{جب لا}}{\text{لا}}$ ، $\text{ما} = \frac{1 - \text{جم لا}}{\text{لا}^2}$

کی ترسیمیں بناؤ۔

۴۔ ثابت کرو کہ

$$\underset{\text{لا} \to \frac{1}{2}\pi}{\text{نہا}} \left(\text{قط لا} - \text{مس لا}\right) = 0$$

۵۔ ثابت کرو کہ

$$\underset{\text{لا} \to 0}{\text{نہا}} \frac{\sqrt{1 + \text{لا}} - \sqrt{1 - \text{لا}}}{\text{لا}} = 1$$

۶۔ ثابت کرو کہ

$$\underset{\text{لا} \to \infty}{\text{نہا}} \left\{ \sqrt{\text{لا}^2 + \text{لا} + 1} - \text{لا} \right\} = \frac{1}{2}$$

۷۔ ایک دئے ہوئے دائرہ کے اندرونی اور بیرونی منتظم کثیر الاضلاع کھینچے گئے۔ ثابت کرو کہ جب ن بڑا ہو تو ۲ ن ضلعوں والے اندرونی اور بیرونی کثیر الاضلاعوں کے رقبوں میں فرق ن ضلعوں والے اندرونی اور بیرونی کثیر الاضلاعوں کے رقبوں کے فرق کا $\frac{1}{4}$ ہوتا ہے۔

۸۔ ایک خط مستقیم اب اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو ثابت خطوط مستقیم ولا، وما پر اس کے مقطوعوں وا، وب کا مجموعہ مستقل رہتا ہے۔ اگر اب کے دو متصل محلوں کا نقطہ تقاطع ن ہو اور ق وہ نقطہ ہو جس پر زاویہ لا و ما کا ناصف اب کو قطع کرتا ہے تو ان = ق ب

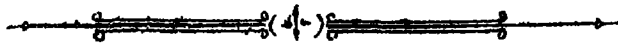
۹۔ دائرہ کے نقطہ ا میں سے وتر ان کھینچا گیا اور ا پر کے مماس پر ایک نقطہ ت اس طرح لیا گیا کہ ات = ان، اگر ت ن محدودہ ا میں سے گذرنے والے قطر کو ق پر ملے تو اق کی انتہائی قیمت جب ن، ا کی طرف حرکت کرے دائرہ کے قطر کا دو چند ہوتی ہے۔

۱۰۔ ایک خط مستقیم ا ب اس طرح حرکت کرتا ہے کہ دو ثابت خطوط مستقیم و لا، و ما پر اسکے مقطوعوں اور ا ب سے بننے والے مثلث ا و ب کا رقبہ مستقل رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ ا ب کے دو متصل محلوں کے تقاطع کا انتہائی نقطہ ا ب کا وسطی نقطہ ہوتا ہے۔

۱۱۔ مستقل طول کا ایک خط مستقیم ا ب اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس کے سرے دو ثابت علی القوائم خطوط مستقیم و لا، و ما پر رہتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر ا ب کے دو متصل محلوں کا انتہائی نقطہ تقاطع ن ہو اور و سے ا ب پر جو عمود کھینچا جائے اس کا پائین ل ہو تو ا ن = ل ب۔

۱۲۔ ایک دائری قوس کے سروں پر اور اس کے وسطی نقطہ پر مماس کھینچے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان مماسوں سے بننے والے مثلث کا رقبہ آخرکار اس مثلث کے رقبہ کا نصف ہوتا ہے جس کے راس نقاط تماس ہوں۔

۱۳۔ اگر ن ج نَ ایک ناقص کا کوئی ثابت قطر ہو اور ق ھ اس قطر کا کوئی معین اور اگر ق پر کا مماس ج ن ممدودہ کو ت پر ملے تو ثابت کرو کہ نسبت ت ن : ن ھ کی انتہائی قیمت جبکہ ن ھ لاانتہا چھوٹا ہو ایک ہے۔



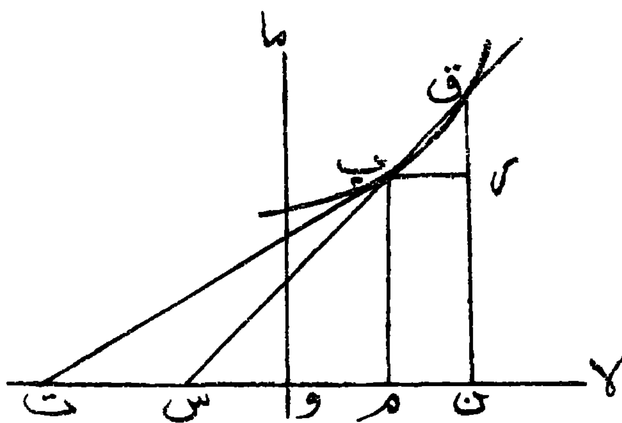
۴۵

دوسرا باب

مشتق تفاعل

۲۴ ـ تمہید ـ ہندسی توضیحات ـ کسی منحنی کے دئے ہوئے نقطہ پر مماسی خط کی سمت دریافت کرنے کے سوال سے تفرقی احصا کی ابتدا ہوئی ـ

فرض کرو کہ پ اور ق دو متصل نقطے ایک مسلسل منحنی ما = فما(لا) ...(۱) پر ہیں، نیز پ م اور ق ن ان کے معین ہیں ـ پ ر خط و لا کے متوازی ہے اور وتر پ ق محور لا سے س پر ملتا ہے ـ



شکل ۱۹

اگر نقطہ پ کو ثابت رکھا جائے اور ق نقطہ پ کے قریب لایا جائے تو یہ وتر عام ہندسی منحنی کی صورت میں ایک خاص انتہائی مقام پ ت اختیار کرے گا اور ہم اسے نقطہ پ پر مماسی خط کی تعریف قرار دینگے۔ ایسا ممکن ہے کہ منحنی کے ایک یا زیادہ ایسے نقطوں پر وتر کا کوئی انتہائی مقام نہ ہو۔
مماسی خط کی سمت اس زاوئے سے حاصل ہوتی ہے جو ت پ خط و لا سے بناتا ہے یعنی شکل میں زاویہ ت پ س لا کی انتہائی قیمت ہے۔
فرض کرو کہ

و م = لا ، پ م = ما ، و ن = لا + مف لا ، ق ن = ما + مف ما

تو ∠ ت پ س لا = پ م / س م = ق ر / پ ر = مف ما / مف لا .... (۲)

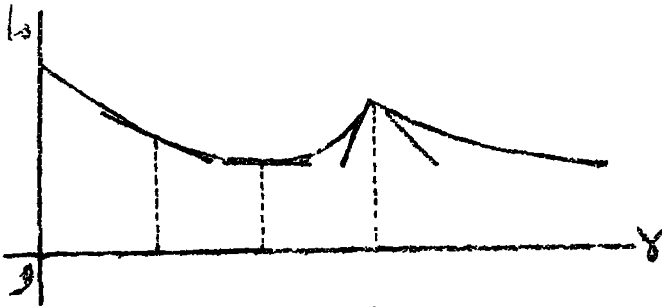
اب سوال صرف اتنا ہے کہ کسر مف ما / مف لا کی انتہائی قیمت دریافت کیجائے جبکہ مف لا کی انتہا صفر ہو۔ اس کی انتہائی قیمت کو

فر ما / فر لا ..... (۳) ، ترقیم [فر ما / فر لا = $\frac{dx}{dy}$]

سے تعبیر کیا جاتا ہے ، اسے ایک ہی علامت تصور کرنا چاہئے۔ کسری شکل انتہا حاصل کرنے کے طریقے کی یاد دہانی کے لئے برقرار رکھی گئی ہے۔ تحلیلاً اسی چیز کو فما (لا) سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اسے فما (لا) کا مشتق تفاعل کہتے ہیں۔
علامت (۳) سے جو منحنی کی خاصیت تعبیر ہوتی ہے اس کے لئے ہندسی نام تجویز کرنے میں بہت سہولت ہوگی۔ اس معنی میں ہم اصطلاح "ڈھال" کام میں لائینگے۔ اگر ہم منحنی کے کسی نقطہ پر دائیں جانب مماسی خط کھینچیں تو ڈھال اس زاویہ کا مثلثی مماس ہے جو مماسی خط محور لا کی مثبت سمت سے بناتا ہے۔ اگر یہ زاویہ منفی ہے تو ڈھال منفی ہوگا اور اگر مماسی خط و لا کے متوازی ہے تو ڈھال صفر ہوگا۔ دیکھو شکل ۲۰

۴۶

اکثر صورتوں میں جن سے ہمیں واسطہ پڑتا ہے ڈھال بھی خود لا کا مسلسل تفاعل ہوتا ہے اگرچہ ایسا ممکن ہے کہ ایک یا زیادہ اکیلے نقطوں پر جہاں ماسی خط محور کا لا پر عمود وار ہو ڈھال لا انتہا ہو جائے۔ شکل میں ایسی صورت بھی دکھائی گئی ہے جبکہ ڈھال میں محدود مقدار کا توڑ یا عدم تسلسل ہے۔



شکل ۲۰

۲۵ - مشتق تفاعل کی عام تعریف -

چونکہ مشتق تفاعل کا تخیل ریاضی کی تمام شاخوں میں نہایت اہم ہے اس لئے ہم اس کی تعریف زیادہ باقاعدہ طور پر بغیر ہندسی مثالوں کی مدد کے درج کرتے ہیں۔

۱۲۷ فرض کرو کہ ما، متبوع متغیر لا کا خاص وسعت میں ایک مسلسل تفاعل ہے۔ اب اگر لا میں مف لا کا اضافہ کیا جائے جہاں لا + مف لا مذکورۂ بالا وسعت میں واقع ہے اور اس کی وجہ سے ما میں مف ما کا اضافہ ہو تو لا کو ثابت مانکر نسبت

$$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

اضافہ مف لا کا تفاعل ہوگی۔

اب اگر مف لا اور اس کی وجہ سے مف ما سلسلہ وار کچھ قیمتیں اختیار کریں جنکی انتہا صفر ہو تو اس نسبت کی قیمت ایک معین اور واحد انتہائی

مقدار کی طرف مائل ہوگی۔ اس طرح حاصل شدہ قیمت کو ہم ما کا بلحاظ لا کے "مشتق تفاعل" یا "مشتق" یا "تفرقی سر" کہینگے۔ اور اس کو علامت

$\frac{\text{ف ما}}{\text{ف لا}}$ .... (۲) سے ظاہر کرینگے۔

مختصراً مشتق تفاعل (جب یہ وجود رکھتا ہو) اس نسبت کی انتہائی قیمت ہے جو تفاعل کے اضافہ کو متبوع متغیر کے اضافہ کے ساتھ ہے جبکہ دونوں اضافے لاانتہا چھوٹے ہوجائیں۔

اس بات کو اچھی طرح سمجھ لینا چاہئے کہ تعریف بالا میں ہم ایک خاص نسبت کی انتہائی قیمت کا ذکر کرتے ہیں نہ کہ مف ما اور مف لا کی انتہائی قیمتوں کی نسبت کا۔ موخرالذکر نسبت کی قیمت دریافت نہیں کی جاسکتی کیونکہ اس کی شکل غیر معین $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ہے۔

جب ہم یہ کہتے ہیں کہ نسبت $\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$ کی واحد انتہائی قیمت ہے تو یہ سمجھنا چاہئے کہ متبوع متغیر کی وسعت کے اندر لا کی کسی درمیانی قیمت کے لئے اس نسبت کی انتہا صرف ایک ہی ہے خواہ مف لا مثبت جانب سے صفر کی طرف مائل ہو خواہ منفی جانب سے۔ بعض صورتوں میں ایسا ہوتا ہے کہ مف لا کے مثبت یا منفی جانب سے صفر کی طرف آنے سے نسبت کی انتہا مختلف ہوتی ہے۔ ایسے حالات میں مذکورہٴ بالا تعریف کے مطابق کوئی مشتق وجود نہیں رکھتا، لیکن ان انتہائی قیمتوں کو ہم بالترتیب "دائیں" اور "بائیں" مشتق کہہ سکتے ہیں۔ دیکھو شکل ۲۰۔

اس سوال کا جواب کہ نسبت $\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$ کی کوئی معین انتہائی قیمت ہے یا نہیں، تفاعل ما کی نوعیت پر منحصر ہے۔ جن تفاعلوں کے لئے یہ انتہا معین اور یگانہ ہو (سوائے لا کی چند اکیلی قیمتوں کے لئے) انہیں ہم قابل تفرق تفاعل

کہینگے۔ باقی تمام تفاعل جو قابلِ تفرق نہیں ہیں ابتداہی سے علم احصا کی حدود سے باہر کردیئے گئے ہیں۔

قابلِ تفرق تفاعل لازماً مسلسل ہوگا لیکن اس دعوے کا عکس صحیح نہیں ہے۔ مگر ایسے تفاعل جو مسلسل ہیں لیکن تفرق نہیں ہوسکتے وہ علم ریاضی میں بہت کم ملتے ہیں۔

مشتق تفاعل کے لئے علاوہ $\frac{\text{ف ما}}{\text{ف لا}}$ کے اور بھی بہت سی علامتیں ہم استعمال کرینگے۔ عموماً اس کو ظاہر کرنیکے لئے تفاعل کی علامت پر زبر لگادیجائیگی۔ پس اگر ما = فا(لا)۔۔ (۳) تو مشتق تفاعل کو ماَ یا جیسے کہ اوپر بیان ہوچکا ہے فاَ(لا) سے تعبیر کیا جائیگا۔

اب چونکہ $\frac{\text{صف ما}}{\text{صف لا}} = \frac{\text{فا(لا + صف لا) − فا(لا)}}{\text{صف لا}}$

اس لئے صف لا کی بجائے ھ لکھنے سے

$$\text{فاَ(لا)} = \text{نہا}_{\text{ھ} \to 0} \frac{\text{فا(لا + ھ) − فا(لا)}}{\text{ھ}} \quad \text{......(۴)}$$

آئندہ یہ ضابطہ اکثر استعمال کیا جائیگا۔

کسی دیئے ہوئے تفاعل کے تفرقی سر دریافت کرنے کے عمل کو ہم "تفرق کرنا" کہینگے۔ اگر لا متبوع متغیر ہو تو " $\frac{\text{ف}}{\text{ف لا}}$ " اس عمل کی علامت تصور کیجاسکتی ہے اور اسے واحد علامت "عف" سے ظاہر کرنے میں زیادہ سہولت ہوگی۔ یعنی بلحاظ لا کے ما کے تفرقی سر کے لئے

$\frac{\text{ف ما}}{\text{ف لا}}$ ، $\frac{\text{ف}}{\text{ف لا}}$ ما اور عف ما میں سے کوئی سی بھی علامت کام میں لائی جاسکتی ہے۔ **نوٹ** [عامل تفرق کا اختصار عف = D] مترجم۔

۲۶ - طبیعی مثالیں۔ مختلف مضامین میں مشتق تفاعل کے استعمال کی اہمیت اس بات پر مبنی ہے کہ اس سے اصل تفاعل کے اضافہ کی شرح کا ناپ حاصل ہوتا ہے جبکہ متبوع متغیر میں اکائی کا اضافہ ہو۔

مثلاً ہم پہلے ایک نقطہ کی خطی حرکت پر غور کرینگے۔ خط حرکت پر کسی مقررہ مبدأ سے متحرک نقطہ کا فاصلہ س وقت ت کا (جو کسی مقررہ آن سے ناپا گیا ہو) تفاعل ہوگا۔ ان متغیروں میں رشتہ اکثر ترسیماً "مقامات کے منحنی" سے ظاہر کیا جاتا ہے جس میں فصلہ ت کے متناسب ہوتا ہے اور معین س کے۔ اگر وقفہ مف ت میں فاصلہ مف س طے ہو تو کسر $\frac{مف س}{مف ت}$ وقفہ مف ت میں 'اوسط رفتار' کہلاتی ہے یعنی بہ الفاظ دیگر اگر کوئی نقطہ اس مستقل رفتار سے حرکت کرے تو وہ اسی وقفہ مف ت میں وہی فاصلہ مف س طے کریگا۔ انتہا میں جبکہ مف ت اور اس کی وجہ سے مف س لاانتہا چھوٹے ہوجاتے ہیں تو اس اوسط رفتار کی انتہائی قیمت کو ہم از روئے تعریف آن ت پر کی رفتار کہینگے۔ علم احصا کی ترقیم میں رفتار و ذیل کی مساوات سے حاصل ہوگی

$$و = \frac{فر س}{فر ت} \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

مذکورہ بالا ترسیمی تعبیر میں و 'مقامات کے منحنی' کا ڈھال ہے۔

اب رفتار و خود ت کا تفاعل ہے۔ اس رشتہ کو ظاہر کرنے والا منحنی رفتاری منحنی کہلاتا ہے۔ اگر وقفہ مف ت میں رفتار میں مف و کا اضافہ ہو تو کسر $\frac{مف و}{مف ت}$ کو اس وقفہ میں 'رفتار کے اضافہ کی اوسط شرح' یا 'اوسط اسراع' کہتے ہیں۔ اوسط اسراع کی انتہائی قیمت کو جبکہ مف ت لاانتہا چھوٹا ہوجاتا ہے، آن ت پر کا اسراع کہتے ہیں۔

اگر عہ اس اسراع کو ظاہر کرے تو $عہ = \frac{فر و}{فر ت} \quad \ldots\ldots (۲)$

ترسیمی تعبیر میں عہ رفتاری منحنی کا ڈھال ہے۔
ایک استوار جسم کی صورت میں جو ایک ثابت محور کے گرد گھوم رہا ہے اگر جسم کسی معیاری مقام سے شروع ہو کر زاویہ طہ میں سے گھوم جائے تو اوسط

زاوی رفتار، وقفہ مف ت میں $\frac{\text{مف طہ}}{\text{مف ت}}$ ہو گی اور آن ت پر کی زاوی

رفتار $\frac{\text{فر طہ}}{\text{فر ت}}$ .... (۳) ہو گی۔

نیز اگر سہ اس زاوی رفتار کے لئے استعمال کریں تو وقفہ مف ت میں

"اوسط زاوی اسراع" $\frac{\text{مف سہ}}{\text{مف ت}}$ سے ظاہر ہو گا اور آن ت پر کا زاوی

اسراع" $\frac{\text{فر سہ}}{\text{فر ت}}$ ...... (۴) ہے۔

نیز کسی شئے کی سلاخ کا طول تپش (طہ) کا تفاعل ہوتا ہے۔ اگر تپش طہ پر ایک ایسی سلاخ کا طول لا ہو جس کا طول کسی معیاری تپش (فرض کرو ۰ سی) پر اکائی ہے تو $\frac{\text{مف لا}}{\text{مف طہ}}$ تپش کے طہ سے طہ + مف طہ تک جانے

میں سلاخ کے خطی پھیلاؤ کی اوسط قدر ہے اور $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر طہ}}$ تپش طہ پر پھیلاؤ

کی قدر یا سر ہے۔

بطور دوسری مثال کے فرض کرو کہ ایک مائع ہے جو آزادانہ سلسلہ وار چند ایسی شکلیں اختیار کر سکتا ہے کہ دباؤ (د)، اکائی کمیت کے حجم (ح) کا ایک معین تفاعل ہے۔

اگر حجم ح سے ح + مف ح ہو جائے تو کسر $-\frac{\text{مف ح}}{\text{ح}}$ اس نسبت کا ناپ ہے جو حجم کی کمی کو اصل حجم کے ساتھ ہے اور اس لئے اسے ہم "پچکاؤ" کہتے ہیں

یہ پچکاؤ پیدا کرنے کے لئے دباؤ کے اضافہ مف د کو پچکاؤ کے ساتھ نسبت $-\frac{ح\ مف\ د}{مف\ ح}$ ہو گی اس نسبت کی انتہائی قیمت کو جبکہ مف ح لا انتہا چھوٹا کر دیا جاتا ہے یعنی $-\frac{ح\ فر\ د}{فر\ ح}$ کو دئے ہوئے حالات کے ماتحت سیال کی حجمی لچک کہتے ہیں۔

۲۷۔ تفرقات۔ ابتدائی اصولوں سے۔

دئے ہوئے تحلیلی تفاعلوں کے مشتق نکالنے کے عام قاعدے دریافت کرنے سے پہلے ہم چند مثالوں پر ابتدائی اصولوں کی بنا پر غور کرینگے۔

مثال ۱:- اگر ما = لا　　تو مف ما = مف لا اور اس لئے

$$\frac{مف\ ما}{مف\ لا} = ۱،\quad پس\quad \frac{فر\ ما}{فر\ لا} = ۱$$

مثال ۲- $ما = لا^۲ \quad \ldots\ldots (۱)$

مف لا کی بجائے ھ لکھنے سے $\frac{مف\ ما}{مف\ لا} = \frac{(لا+ھ)^۲ - لا^۲}{ھ} = ۲لا + ھ$

انتہا لینے سے جبکہ ھ ← ۰ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{فر\ ما}{فر\ لا} = ۲لا \quad \ldots\ldots (۲)$$

مثال ۳- فرض کرو کہ $ما = \frac{۱}{لا} \quad \ldots\ldots (۳)$

$$پس\quad مف\ ما = \frac{۱}{لا+ھ} - \frac{۱}{لا} = \frac{-ھ}{لا(لا+ھ)}$$

اس لئے $\frac{مف\ ما}{مف\ لا} = -\frac{۱}{لا(لا+ھ)}$

اور
$$\frac{\text{فرتا}}{\text{فرلا}} = \text{نہا}_{\text{ھ}\to 0} \; \frac{-1}{\text{لا}(\text{لا}+\text{ھ})} = -\frac{1}{\text{لا}^{2}} \quad \ldots\ldots (۴)$$

منفی علامت کی وجہ یہ ہے کہ جب، لا بڑھتا ہے تو تا گھٹتا ہے۔

مثال ۴:- اگر $\text{تا} = \sqrt{\text{لا}} \quad \ldots\ldots (۵)$

$$\text{تو مف تا} = \sqrt{\text{لا}+\text{ھ}} - \sqrt{\text{لا}} = \frac{\text{ھ}}{\sqrt{\text{لا}+\text{ھ}}+\sqrt{\text{لا}}}$$

$$\therefore \frac{\text{مف تا}}{\text{مف لا}} = \frac{1}{\sqrt{\text{لا}+\text{ھ}}+\sqrt{\text{لا}}}$$

اس لئے انتہا میں جب، ھ ← ۰ تو

$$\frac{\text{فرتا}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{2\sqrt{\text{لا}}} \quad \ldots\ldots (۶)$$

۲۸- معیاری تفاعلوں کا تفرق۔

(آ) اگر $\text{تا} = \text{لا}^{\text{م}} \quad \ldots\ldots (۱)$

$$\text{تو} \quad \frac{\text{مف تا}}{\text{مف لا}} = \frac{(\text{لا}+\text{مف لا})^{\text{م}} - \text{لا}^{\text{م}}}{(\text{لا}+\text{مف لا}) - \text{لا}}$$

دفعہ ۲۲ (آ) میں یہ ثابت کیا گیا ہے کہ م کی تمام منطق قیمتوں کے لئے مف لا ← ۰ کی صورت میں اس کسر کی انتہا $\text{م لا}^{\text{م}-1}$ ہے۔

$$\text{پس} \quad \frac{\text{فرتا}}{\text{فرلا}} = \text{م لا}^{\text{م}-1} \quad \ldots\ldots (۲)$$

مثال:- اگر م = ۲ تو $\frac{\text{فرتا}}{\text{فرلا}} = 2\,\text{لا}$

اور اگر م = $\frac{1}{2}$ تو $\frac{\text{فرتا}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{2}\,\text{لا}^{-\frac{1}{2}}$ دیکھو دفعہ ۲۷

(ب) اگر $\text{تا} = \text{جب لا} \quad \ldots\ldots (۳)$

تو مف لا کی بجائے ھ لکھنے سے حاصل ہوگا

$$\frac{مف\ ما}{مف\ لا} = \frac{جب(لا+ھ) - جب\ لا}{ھ} = \frac{جب\ \frac{1}{2}ھ}{\frac{1}{2}ھ} \times جم(لا+\frac{1}{2}ھ)$$

اگر زاویے قوسی پیمانہ میں ناپے گئے ہوں تو دفعہ ۲۲ (۲) سے

$$نہا_{ھ \to 0} \left[\frac{جب(\frac{1}{2}ھ)}{\frac{1}{2}ھ}\right] = 1$$

اور دوسرے جزو ضربی کی انتہائی قیمت جم لا ہے۔

$$\text{اس لئے}\quad \frac{فر\ ما}{فر\ لا} = جم\ لا \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴)$$

طالب علم شکل (۱۴) صفحہ (۴۲) میں جب لا کی ترسیم پر غور کرنا چاہئے اور اس امر کی تصدیق کرنی چاہیے کہ منحنی کا ڈھال اس ضابطہ کے مطابق بدلتا ہے۔

(۳) اگر $ما = جم\ لا \quad \ldots\ldots\ldots (۵)$

$$\text{تو}\quad \frac{مف\ ما}{مف\ لا} = \frac{جم(لا+ھ) - جم\ لا}{ھ}$$

$$= -\frac{جب\ \frac{1}{2}ھ}{\frac{1}{2}ھ} \times جب(لا+\frac{1}{2}ھ)$$

مذکورہ بالا کی وجہ سے بنا پر اس کی انتہائی قیمت ہے

$$\frac{فر\ ما}{فر\ لا} = -جب\ لا \quad \ldots\ldots\ldots (۶)$$

(۴) اگر $ما = سس\ لا \quad \ldots\ldots\ldots (۷)$

$$\text{تو}\quad \frac{مف\ ما}{مف\ لا} = \frac{سس(لا+ھ) - سس\ لا}{ھ}$$

$$= \frac{جب(لا+ھ)\ جم\ لا - جب\ لا\ جم(لا+ھ)}{ھ\ جم\ لا\ جم(لا+ھ)}$$

= (جب ھ / ھ) × ۱ / (جم لا جم (لا + ھ))

اور انتہا میں

فر ما / فر لا = ۱ / جم² لا = قط² لا .... (۸)

اس سے ثابت ہوتا ہے کہ ما = مس لا کے منحنی کا ڈھال نقاط عدم تسلسل کے درمیان ہمیشہ مثبت ہے۔ دیکھو شکل (۱۵) صفحہ (۴۲)۔

۲۹ — سادہ قسم کے جملوں کو تفرق کرنیکے ضابطے۔ حاصل جمع کا تفرق۔

(۱) فرض کرو کہ ما = ع + ج .... (۱)

جہاں ع متغیر لا کا معلومہ تفاعل ہے اور ج مستقل ہے۔

پس ما + مف ما = ع + مف ع + ج

∴ مف ما = مف ع

یعنی مف ما / مف لا = مف ع / مف لا

اور اس سے انتہا میں فر ما / فر لا = فر ع / فر لا .... (۲)

اگرچہ یہ بالکل ظاہر ہے کہ تفرق کرنے میں جمع کیا ہوا مستقل غائب ہو جاتا ہے تاہم یہ امر نہایت ضروری ہے۔ اس کے ہندسی معنی یہ ہیں کہ کسی منحنی کو کلیتاً ما محور کے متوازی ہٹا دینے سے ڈھال میں کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوتی۔

(۲) اگر ما = ع + و .... (۳)

جہاں ع اور و متغیر لا کے دئے ہوئے تفاعل ہیں تو دفعہ ۱۸ کے مطابق

مف ما = مف ع + مف و

اسلئے مف ما / مف لا = مف ع / مف لا + مف و / مف لا

چونکہ ایک مجموعہ کی انتہائی قیمت علیحدہ علیحدہ رقموں کی انتہاؤں کے مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے

اس لئے $\frac{فر ھا}{فر لا} = \frac{فر ع}{فر لا} + \frac{فر و}{فر لا}$ .... (۴)

نیز اگر $ھا = ع + و + ط$ .... (۵)

تو اوپر کے قاعدہ کو دو مرتبہ استعمال کرنے سے

$$\frac{فر ھا}{فر لا} = \frac{فر}{فر لا}(ع + و) + \frac{فر ط}{فر لا}$$

$$= \frac{فر ع}{فر لا} + \frac{فر و}{فر لا} + \frac{فر ط}{فر لا}$$ .... (۶)

اس طریقہ پر یکے بعد دیگرے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ تفاعلوں کی کسی محدود تعداد کے مجموعہ کا مشتق الگ الگ تفاعلوں کے جداگانہ مشتقات کا مجموعہ ہے۔

مثال :- جملہ $ا_۰ لا^م + ا_۱ لا^{م-۱} + ... + ا_{م-۱} لا + ا_م$

کا مشتق تفاعل $م ا_۰ لا^{م-۱} + (م-۱) ا_۱ لا^{م-۲} + ... + ا_{م-۱}$ ہے۔

۲۳ — حاصل ضرب کا تفرق۔

(۱) $ھا = ج ع$ .... (۱)

جہاں ج مستقل ہے اور ع متغیر لا کا تفاعل ہے،

تو $ھا + مف ھا = ج (ع + مف ع)$

اس لئے $مف ھا = ج \times مف ع$

اور $\frac{مف ھا}{مف لا} = ج \frac{مف ع}{مف لا}$

اس لئے انتہا میں $\frac{فر ھا}{فر لا} = ج \frac{فر ع}{فر لا}$ .... (۲)

پس مستقل جزو ضربی تفرق کرنے کے بعد بھی قائم رہتا ہے۔

اس امر کے ہندسی معنی یہ ہیں کہ اگر کسی منحنی کے تعین ایک خاص نسبت میں تبدیل کئے جائیں تو حال بھی اسی نسبت سے بدل جاتا ہے۔ دیکھو شکل نمبر ۲۷ صفحہ (۱۱۹)

(۳) اگر $\text{ما} = \text{ع}\,\text{و}$ .... (۳)

جہاں ع اور و دونوں لا کے تفاعل ہیں تو دفعہ ۱۲ کے مطابق

$$\text{مف ما} = (\text{ع} + \text{مف ع})(\text{و} + \text{مف و}) - \text{ع}\,\text{و}$$

$$= \text{و مف ع} + \text{ع مف و} + \text{مف ع مف و}$$

اور اس لئے $\dfrac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \text{و}\dfrac{\text{مف ع}}{\text{مف لا}} + (\text{ع} + \text{مف ع})\dfrac{\text{مف و}}{\text{مف لا}}$

اور اس کی انتہا لینے سے اس اصول کے مدنظر کہ حاصل ضرب کی انتہا علاحدہ علاحدہ انتہاؤں کے حاصل ضرب کے مساوی ہے ہمیں ذیل کا ضابطہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{و}\frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} + \text{ع}\frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}} \quad \text{......... (۴)}$$

اگر مساوات کے دونوں جانب $\text{ما} = \text{ع}\,\text{و}$ سے تقسیم کئے جائیں

تو $\dfrac{1}{\text{ما}}\dfrac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \dfrac{1}{\text{ع}}\dfrac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} + \dfrac{1}{\text{و}}\dfrac{\text{فر و}}{\text{فر لا}}$

اس نتیجہ کی آسانی سے توسیع کی جا سکتی ہے۔ پس اگر $\text{ما} = \text{ع}\,\text{و}\,\text{ط}$ تو $\text{ی} = \text{ع}\,\text{و}$ رکھنے سے $\text{ما} = \text{ی}\,\text{ط}$

اس لئے اوپر کے قاعدہ کو دو مرتبہ استعمال کرنے سے حاصل ہوگا

$$\frac{1}{\text{ما}}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{1}{\text{ی}}\frac{\text{فر ی}}{\text{فر لا}} + \frac{1}{\text{ط}}\frac{\text{فر ط}}{\text{فر لا}}$$

$$= \frac{1}{\text{ع}}\frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} + \frac{1}{\text{و}}\frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}} + \frac{1}{\text{ط}}\frac{\text{فر ط}}{\text{فر لا}} \quad \text{...... (۵)}$$

اور اسی طرح اجزاء کی کسی محدود تعداد کے لئے اگر ہم آخر الذکر ضابطہ کی عام

شکل کے دونوں جانب $\text{ما} = \text{ع و ط} \ldots$ سے ضرب دیں تو ذیل کا نتیجہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{و ط}\ldots \times \frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} + \text{ع ط}\ldots \times \frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}} + \text{ع و}\ldots \times \frac{\text{فر ط}}{\text{فر لا}} \ldots (\text{۶})$$

الفاظ میں اسے اس طرح بیان کر سکتے ہیں: مختلف اجزاء میں سے ہر ایک کو باری باری متغیر مانکر اور باقی اجزاء کو مستقل مانکر لا کے لحاظ سے مشتق نکالو تو حاصل ضرب کا مشتق تفاعل ان جداگانہ دریافت کئے ہوئے مشتقوں کا مجموعہ ہوگا۔

مثال ۱:- اگر $\text{ما} = \text{ع} \times \text{ع} \times \ldots \text{م اجزاء تک} = \text{ع}^{\text{م}} \ldots\ldots (\text{۷})$

$$\text{تو}\quad \frac{1}{\text{ما}}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{1}{\text{ع}}\,\frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} + \frac{1}{\text{ع}}\,\frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} + \ldots\ \text{م اجزاء تک}$$

$$= \frac{\text{م}}{\text{ع}}\,\frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}}$$

$$\text{پس}\quad \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{م}\,\text{ع}^{\text{م}-1}\,\frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} \ldots\ldots (\text{۸})$$

اس نتیجہ کا عام ثبوت جس میں م کے مثبت صحیح عدد ہونے کی قید نہیں ہے دفعہ ۳۲ میں دیا جائیگا۔

مثال ۲:- اگر $\text{ما} = \text{جب لا جم لا} \ldots\ldots (\text{۹})$

$$\text{تو}\quad \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{جم لا}\,\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}(\text{جب لا}) + \text{جب لا}\,\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}(\text{جم لا})$$

$$= \text{جم لا} \times \text{جم لا} - \text{جب لا} \times \text{جب لا}$$

$$= \text{جم}^2\,\text{لا} - \text{جب}^2\,\text{لا} = \text{جم ۲ لا} \ldots\ldots (\text{۱۰})$$

مثال ۳:- اگر $\text{ما} = \text{لا}^2\,\text{جب لا} \ldots\ldots (\text{۱۱})$

$$\text{تو}\quad \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{لا}^2\,\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}(\text{جب لا}) + \text{جب لا}\,\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}(\text{لا}^2)$$

$$= \text{لا}^2\,\text{جم لا} + \text{۲ لا جب لا} \ldots\ldots (\text{۱۲})$$

۱۳۔ خارج قسمت کا تفرق۔

فرض کرو کہ $\text{ما} = \frac{\text{ع}}{\text{و}}$ .... (۱)

جہاں ع اور و متغیر لا کے تفاعل ہیں۔ پہلے کی طرح

$$\text{مف ما} = \frac{\text{ع} + \text{مف ع}}{\text{و} + \text{مف و}} - \frac{\text{ع}}{\text{و}} = \frac{\text{و مف ع} - \text{ع مف و}}{\text{و}(\text{و} + \text{مف و})}$$

اس لئے

$$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \frac{\text{و} \frac{\text{مف ع}}{\text{مف لا}} - \text{ع} \frac{\text{مف و}}{\text{مف لا}}}{\text{و}(\text{و} + \text{مف و})}$$

اور انتہا میں

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{و} \frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} - \text{ع} \frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}}}{\text{و}^2} \quad \text{........ (۲)}$$

اسے الفاظ میں اس طرح بیان کیا جا سکتا ہے۔ اگر کسی خارج قسمت کا مشتق نکالنا ہو تو نسب نما اور شمار کنندہ کے مشتق کے حاصل ضرب میں سے شمار کنندہ اور نسب نما کے مشتق کا حاصل ضرب تفریق کرو اور اس حاصل تفریق کو نسب نما کے مربع سے تقسیم کرو۔

خاص شکل $\text{ما} = \frac{1}{\text{و}}$ .... (۳)

خاص غور کے قابل ہے۔

اس صورت میں

$$\text{مف ما} = \frac{1}{\text{و} + \text{مف و}} - \frac{1}{\text{و}} = \frac{-\text{مف و}}{\text{و}(\text{و} + \text{مف و})}$$

$$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = - \frac{\frac{\text{مف و}}{\text{مف لا}}}{\text{و}(\text{و} + \text{مف و})}$$

$$\therefore \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = - \frac{1}{\text{و}^2} \frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}} \quad \text{........ (۴)}$$

ظاہر ہے کہ یہ نتیجہ عام مسئلہ (۲) میں ع = ۱ اور $\frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} = 0$ رکھنے سے حاصل ہو سکتا تھا۔

مثال ۱:- $ما = \frac{1 + لا + لا^2}{1 - لا + لا^2}$ .... (۵)

یہاں $\frac{فر ع}{فر لا} = 1 + 2لا$ اور $\frac{فر و}{فر لا} = -1 + 2لا$

پس $\frac{فر ما}{فر لا} = \frac{(1+2لا)(1-لا+لا^2) + (1-2لا)(1+لا+لا^2)}{(1-لا+لا^2)^2}$

$= \frac{2(1-لا^2)}{(1-لا+لا^2)^2}$ .... (۶)

مثال ۲:- اگر $ما = \frac{1}{ع^م}$ .... (۷)

جہاں م مثبت صحیح عدد ہے تو

$\frac{فر ما}{فر لا} = -\frac{1}{ع^{2م}} \times م ع^{م-1} \frac{فر ع}{فر لا} = -م ع^{-م-1} \times \frac{فر ع}{فر لا}$ .... (۸)

دیکھو دفعہ ۳۲

اس دفعہ کا ضابطہ دفعہ ۳۰ (۴) سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔

اگر $ما = \frac{ع}{و}$ تو $ع = ما و$

اس لئے $\frac{1}{ع} \frac{فر ع}{فر لا} = \frac{1}{و} \frac{فر و}{فر لا} + \frac{1}{ما} \frac{فر ما}{فر لا}$ .... (۹)

پس $\frac{1}{ما} \frac{فر ما}{فر لا} = \frac{1}{ع} \frac{فر ع}{فر لا} - \frac{1}{و} \frac{فر و}{فر لا}$ .... (۱۰)

یہ مذکورہ بالا ضابطہ (۲) کے معادل ہے۔

ذیل کی مثالیں ضروری ہیں۔

(آ) اگر $ما = سس لا = \frac{جب لا}{جم لا}$ .... (۱۱)

تو فرما/فرلا = (جم لا فر/فرلا (جب لا) - جب لا فر/فرلا (جم لا)) / جم² لا

= (جم² لا + جب² لا) / جم² لا = قط² لا .... (۱۲)

نتیجہ دفعہ ۲۶ (۳) کے مطابق ہے۔

اسی طرح اگر ما = ظم لا .... (۱۳)

تو ہم حاصل کر سکتے ہیں فرما/فرلا = - قم² لا .... (۱۴)

(ب) اگر ما = قط لا = ۱ / جم لا .... (۱۵)

تو فرما/فرلا = - ۱/جم² لا · فر/فرلا (جم لا) = جب لا / جم² لا .... (۱۶)

اور اسی طرح اگر ما = قم لا .... (۱۷)

تو فرما/فرلا = - جم لا / جب² لا .... (۱۸)

جیسا کہ دفعہ ۲۵ میں بتایا گیا ہے اگر ہم لا کے لحاظ سے تفرق کرنے کے عمل کو علامت عف سے ظاہر کریں تو دفعات ۲۹ تا ۳۱ کے نتائج مختصراً ذیل کی شکل میں بیان ہو سکتے ہیں

عف (ع + و) = عف ع + عف و .... (۱۹)

عف (ع و) = و عف ع + ع عف و .... (۲۰)

عف (ع/و) = (و عف ع - ع عف و) / و² .... (۲۱)

۳۲۔ تفاعل کے تفاعل کا تفرق۔

اگر ما = فا (ع) .... (۱)

جہاں ع = ف (لا) .... (۲)

اور علامتیں فا اور ف معلومہ تفاعلوں کو ظاہر کرتی ہیں تو ثابت کرنا ہے کہ

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر ع}} \times \frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} = \text{فاَ(ع)} \times \text{فَ(لا)} \quad \ldots (3)$$

اگر مف لا، مف ما، مف ع ایک ساتھ کے اضافے ہوں تو ظاہر ہے کہ

$$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \frac{\text{مف ما}}{\text{مف ع}} \times \frac{\text{مف ع}}{\text{مف لا}}$$

اور چونکہ حاصل ضرب کی انتہا اجزاء کی انتہاؤں کے حاصل ضرب کے مساوی ہے

اس لئے

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر ع}} \times \frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}}$$

ضابطہ (۳) کا مفید استعمال خطی حرکت کے نظریہ میں ہوتا ہے۔

اگر ہم دفعہ ۲۶ کے مطابق کسی متحرک نقطہ کی رفتار اور اسراع کو بالترتیب و اور عا سے تعبیر کریں تو

$$\text{و} = \frac{\text{فر س}}{\text{فر ت}} \quad \text{اور} \quad \text{عا} = \frac{\text{فر و}}{\text{فر ت}} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

اب اگر و کو طے شدہ فاصلہ س کا تفاعل سمجھا جائے تو

$$\text{عا} = \frac{\text{فر و}}{\text{فر س}} \times \frac{\text{فر س}}{\text{فر ت}} = \text{و} \frac{\text{فر و}}{\text{فر س}} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

اسی طرح ایک محور کے گرد گھومنے والے استوار جسم کی صورت میں زاوی اسراع ذیل کے جملہ سے ملیگا جبکہ زاوی رفتار کو طہ کا تفاعل مان لیا جائے

$$\frac{\text{فر سمہ}}{\text{فر طہ}} \times \frac{\text{فر طہ}}{\text{فر ت}} \text{ یعنی سمہ} \frac{\text{فر سمہ}}{\text{فر طہ}} \quad \ldots\ldots (6)$$

ضابطہ (۳) سے ذیل کے اہم نتائج حاصل ہوتے ہیں۔

(آ) اگر ما = فا (لا + ل) .... (۷)

تو مسئلہ (۳) میں ع = لا + ل اور $\frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} = 1$ رکھنے سے

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{فاَ (لا + ل)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۸)$$

حاصل ہوتا ہے۔
اس کی ہندسی تعبیر یہ ہے کہ منحنی کو کلیتاً لا محور کے متوازی ہٹا دینے سے ڈھال میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی۔

(۲) اگر $\text{ما} = \text{فا (ک لا)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۹)$

تو رکھو $\text{ع} = \text{ک لا}$، پس $\frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} = \text{ک}$ اور

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{ک فاَ (ک لا)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۰)$$

حاصل ہوتا ہے۔

(۳) اگر $\text{ما} = \text{ع}^{\text{م}} \quad \ldots\ldots (۱۱)$ جہاں م کوئی منطق مقدار ہے
تو $\text{فا (ع)} = \text{ع}^{\text{م}}$ اور $\text{فاَ (ع)} = \text{م ع}^{\text{م}-۱}$

اسلئے $$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{م ع}^{\text{م}-۱} \frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۲)$$

خاص صورتوں میں جبکہ $\text{م} = \frac{۱}{۲}$ اور $\text{م} = -\frac{۱}{۲}$ تو بالترتیب حاصل ہوتا ہے

$$\left.\begin{aligned} \frac{\text{فر}}{\text{فر لا}} \sqrt{\text{ع}} &= \frac{۱}{۲\sqrt{\text{ع}}} \frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} \\ \frac{\text{فر}}{\text{فر لا}} \frac{۱}{\sqrt{\text{ع}}} &= -\frac{۱}{۲\,\text{ع}^{\frac{۳}{۲}}} \frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (۱۳)$$

اب اوپر کے ضابطوں پر چند مثالیں دیجائینگی۔

مثال (۱):- اگر $\text{ما} = \text{جب}^{\text{م}} \text{لا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۴)$
یعنی $\text{ما} = \text{ع}^{\text{م}}$ جہاں $\text{ع} = \text{جب لا}$

تو $$\text{عف ما} = \text{م ع}^{\text{م}-۱} \frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} = \text{م جب}^{\text{م}-۱} \text{لا} \times \text{جم لا} \quad \ldots (۱۵)$$

مثال (۲) - اگر $\text{ما} = \sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}$ .... (۱۶)

تو $\text{عف ما} = \text{عف} \sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2} = \frac{1}{2}(\text{ا}^2 - \text{لا}^2)^{-\frac{1}{2}} \times \text{عف}(\text{ا}^2 - \text{لا}^2)$

$$= -\frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}} \quad \ldots\ldots (۱۷)$$

مثال (۳) - اگر $\text{ما} = \frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}}$ .... (۱۸)

اس میں $\text{ع} = \text{لا}$ اور $\text{و} = \sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}$ رکھیں تو اس سے پہلی مثال کی بنا پر
$\text{عف ع} = 1$ اور $\text{عف و} = -\frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}}$ حاصل ہوتے ہیں۔

اب کسر کو تفرق کرنے کے قاعدہ سے

$$\text{عف ما} = \frac{\text{و عف ع} - \text{ع عف و}}{\text{و}^2} = \frac{\sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2} + \frac{\text{لا}^2}{\sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}}}{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}$$

$$= \frac{\text{ا}^2}{(\text{ا}^2 - \text{لا}^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \ldots\ldots (۱۹)$$

۳۳ - منقلوب تفاعلوں کا تفرق -

اگر ما متغیر لا کا مسلسل تفاعل ہو تو چند شرائط کے ماتحت (دیکھو دفعہ ۱۶) جو عموماً علم ریاضی کے عام تفاعلوں کی صورت میں پوری ہوتی ہیں لا متغیر ما کا مسلسل تفاعل ہوگا۔

اگر لا اور ما کے متناظر اضافے مف لا، مف ما ہوں تو متماثلاً

$$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} \times \frac{\text{مف لا}}{\text{مف ما}} = 1$$

پس چونکہ حاصل ضرب کی انتہا ان اجزا کی انتہاؤں کے حاصل ضرب کے مساوی ہے

اس لئے $\dfrac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} \times \dfrac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}} = ١$ .... (١)

پس اگر پہلے فرض کر لیا جائے کہ ما بلحاظ لا کے قابل تفرق تفاعل ہے تو نتیجہ نکلتا ہے کہ عموماً لا متغیر ما کا قابل تفرق تفاعل ہوگا - اور یہ دونوں مشتق تفاعل ایک دوسرے کے متکافی ہونگے - اس کی ہندسی تعبیر یہ ہے کہ منحنی کا مماس لا اور ما محوروں سے متمم زاویئے بناتا ہے۔

ذیل کی صورتیں ضروری ہیں -

(ا) اگر ما = جب$^{-١}$ لا .... (٢)

تو لا = جب ما اور $\dfrac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}}$ = جم ما

پس $\dfrac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \dfrac{١}{\text{جم ما}} = \pm \dfrac{١}{\sqrt{١ - \text{لا}^٢}}$ .... (٣)

(٢) اگر ما = جم$^{-١}$ لا .... (۴)

تو لا = جم ما اور $\dfrac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}}$ = ‒ جب ما

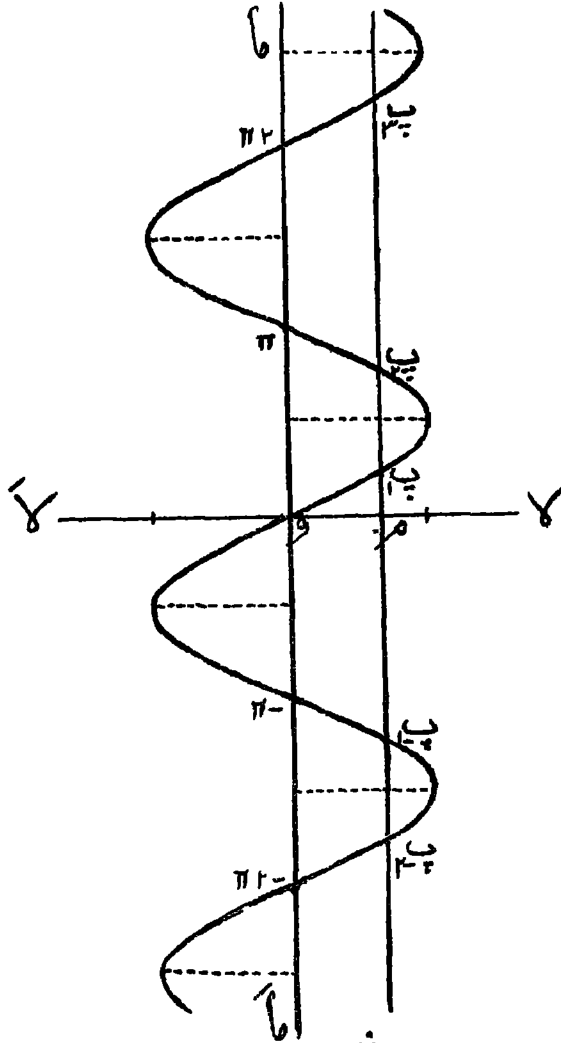
اور اس لئے $\dfrac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \dfrac{١}{‒\text{جب ما}} = \mp \dfrac{١}{\sqrt{١ - \text{لا}^٢}}$ ...... (٥)

ان نتیجوں میں مبہم علامت کے لئے ذیل کی وجہ دی جا سکتی ہے - ہمیں معلوم ہے کہ اگر ما = جب$^{-١}$ لا تو ما متغیر لا کا کثیر القیمت تفاعل ہے یعنی $\pm$ ١ کے درمیان لا کی کسی مقررہ قیمت کے لئے ما کی قیمتوں کا ایک سلسلہ ہوتا ہے - ان میں سے بعض قیمتوں کے لئے $\dfrac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ مثبت ہے اور بعض کے لئے منفی ہے - دیکھو شکل ٢١ صفحہ (٨٤) اور اسی طرح جم$^{-١}$ لا کے لئے -

مروجہ قرارداد کے مطابق اگر ہم جب$^{-١}$ لا سے وہ زاویہ سمجھیں جو

- $\frac{\pi}{2}$ اور + $\frac{\pi}{2}$ کے درمیان واقع ہے اور جسکا جیب لا کے مساوی ہے تو

$$\frac{ف}{ف لا}\left(\text{جب}^{-1}\text{لا}\right) = + \frac{1}{\sqrt{1 - \text{لا}^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$



شکل ۲۱

۶۱ اسی طرح اگر جتم$^{-1}$ لا کو صفر اور π کے درمیان محدود کر دیا جائے

تو $\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}(\text{جتم}^{-1}\text{لا}) = -\frac{1}{\sqrt{1-\text{لا}^2}}$ .... (۷)

(۳) اگر $\text{ما} = \text{مس}^{-1}\text{لا}$ .... (۸)

تو $\text{لا} = \text{مس ما}$ اور $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}} = \text{قط}^2\,\text{ما}$

اسلئے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{1}{\text{قط}^2\,\text{ما}} = \frac{1}{1+\text{لا}^2}$ .... (۹)

اس صورت میں کوئی مبہم علامت نہیں ہے۔ لا کی ہر قیمت کے لئے ما کی لا انتہا قیمتوں کا سلسلہ ہے لیکن ہر ایک کے لئے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کی قیمت وہی ہے کیونکہ منحنی ما = مس$^{-1}$ لا کے متناظر نقطوں پر مماسی خطوط متوازی ہیں۔ دیکھو شکل ۲۲ صفحہ (۸۹)۔

مثال ۱۔ اگر $\text{ما} = \text{جب}^{-1}\left(\frac{\text{لا}}{\sqrt{1+\text{لا}^2}}\right)$

تو $\text{ما} = \text{جب}^{-1}\text{ع}$ جہاں $\text{ع} = \frac{\text{لا}}{\sqrt{1+\text{لا}^2}}$

اب $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر ع}} \times \frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} = \frac{1}{\sqrt{1-\text{ع}^2}}\;\frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}}$

یہ آسانی سے حاصل ہو سکتا ہے کہ

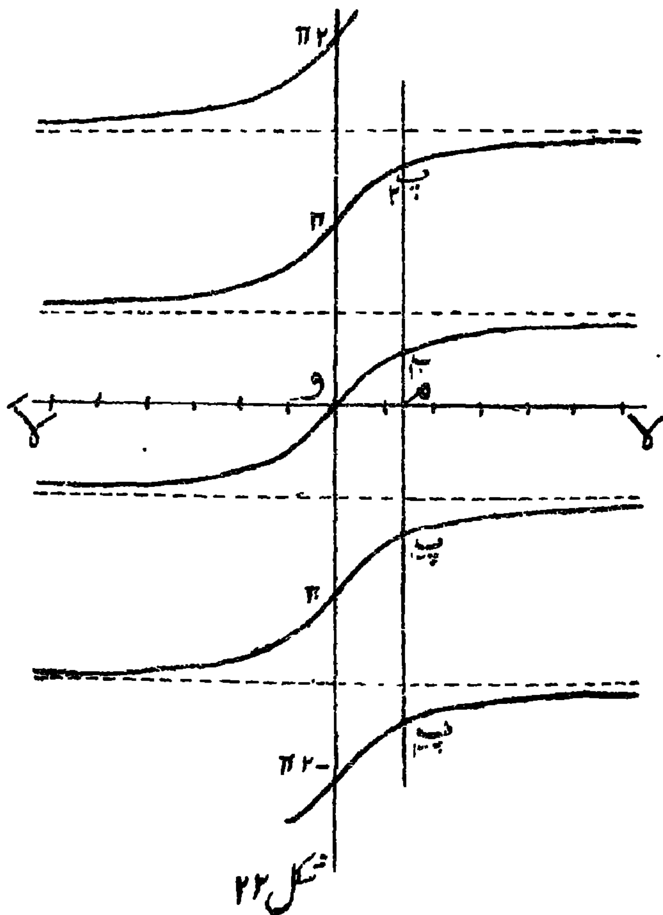
$\sqrt{1-\text{ع}^2} = \frac{1}{\sqrt{1+\text{لا}^2}}$ اور $\frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} = \frac{1}{(1+\text{لا}^2)^{\frac{3}{2}}}$

پس $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{1}{1+\text{لا}^2}$ .... (۱۱)

لا = مس طہ رکھنے سے آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے کہ

$\text{جب}^{-1} \frac{\text{لا}}{\sqrt{1+\text{لا}^2}} = \text{مس}^{-1}\,\text{لا}$ اس سے ظاہر ہے کہ اوپر کا نتیجہ ضابطہ (۹) کے مطابق ہے۔

مثال ۲۔ فرض کرو کہ $\text{ھا} = \text{مس}^{-1} \frac{1+\text{لا}+\text{لا}^2}{1-\text{لا}+\text{لا}^2}$ .... (۱۲)



شکل ۲۲

اگر $\frac{1+\text{لا}+\text{لا}^2}{1-\text{لا}+\text{لا}^2}$ کی بجائے ع لکھیں تو

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{1}{1+\text{ع}^2} \times \frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}}$$

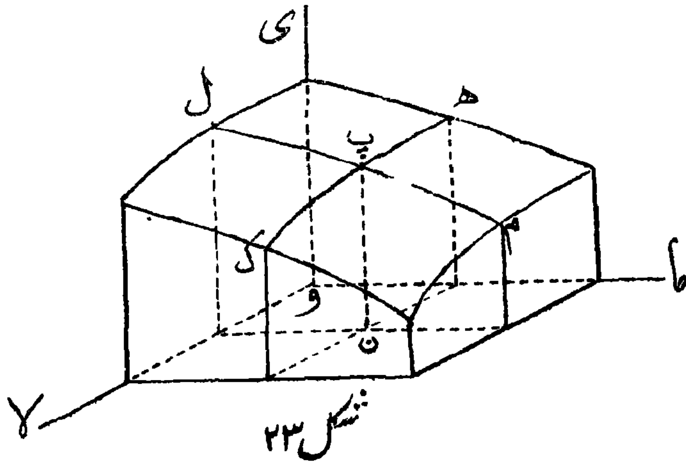
نیز $1+\text{ع}^2 = \frac{2(1+3\text{لا}^2+\text{لا}^4)}{(1-\text{لا}+\text{لا}^2)^2}$ اور $\frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} = \frac{2(1-\text{لا}^2)}{(1-\text{لا}+\text{لا}^2)^2}$

اس لئے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{1-\text{لا}^2}{1+3\text{لا}^2+\text{لا}^4}$ .... (۱۴)

۳۴ - دو یا زیادہ متبوع متغیروں کے تفاعل - جزوی مشتق

اگرچہ اس کتاب کا اصل مقصد صرف ایک متبوع متغیر کے تفاعلوں پر غور کرنا ہے لیکن ابتدا ہی سے زیادہ عام نظریہ کے خیالات اور ترقیم سے واقف ہونا بعض اوقات مفید ثابت ہوگا۔

کوئی مقدار ع دو یا زیادہ متبوع متغیروں لا، ما، ... کا تفاعل اس وقت کہلاتی ہے جبکہ موخر الذکر کی قیمتوں کے جواب میں جو اختیاری اور ایک دوسرے سے بے تعلق ہو سکتی ہیں تابع متغیر ع کا وجود ہو۔ یہ ضروری ہے کہ ہر صورت میں متبوع متغیروں کی قیمتیں انکی جداگانہ حدود کے اندر ہی جائیں پس اگر ایک دی ہوئی سطح پر کوئی نقطہ پ ہو اور پ ن کسی ثابت افقی مستوی پر عمود ہو تو بلندی پ ن نقطہ ن کے محدد (لا، ما) کا تفاعل ہے۔



شکل ۲۳

اسی طرح طبیعیات میں گیس کا دباؤ دو متبوع متغیروں حجم (فی اکائی کمیت) اور تپش کا تفاعل ہے۔ تفاعلی رشتہ شکل ذیل کی مساوات سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

ع = فہ (لا، ما ....) .... (۱)

مذکورہ بالا سطح کی خاص صورت میں اگر ہم بلندی پ ن کو ی سے ظاہر کریں تو

ی = فہ (لا، ما) .... (۲)

تسلسل کی تعریف کو (جو دفعہ میں دی گئی ہے) موجودہ صورت میں اس طرح توسیع دیجا سکتی ہے۔ تفاعل فہ (لا، ما .....) متبوع متغیروں لا، ما ..... کی قیمتوں کے خاص جٹ کے لئے مسلسل کہلائیگا اگر کسی دی ہوئی مقدار ثہ (جو کتنی ہی چھوٹی ہو) کے جواب میں (صفر سے مختلف) ایک مقدار صہ ایسی دریافت ہو سکے کہ انتافول مف لا، مف ما ..... کی صہ سے کم تمام مطلق قیمتوں کے لئے فہ (لا + مف لا، ما + مف ما .....) اور فہ (لا، ما .....) کے فرق کی مطلق قیمت ثہ سے کم ہو۔

پس دو متبوع متغیروں کی خاص صورت میں (جس کو شکل میں دکھایا گیا ہے) شرط تسلسل کا مفہوم یہ ہے کہ مستوی لا ما میں ن کے گرد ایک مستطیل ایسا کھینچا جا سکتا ہے کہ اس مستطیل کے اندر کے تمام نقطوں کے معینوں کا فرق پ ن سے ثہ کی نسبت کم ہو جہاں ثہ کتنی ہی چھوٹی مقدار ہو سکتی ہے

اب فرض کرو کہ تفاعل ع = فہ (لا، ما .....) .... (۳)

مسلسل ہے اور تمام متبوع متغیر سوائے (لا) کے مستقل رکھے جاتے ہیں تب یہ فرض کرکے کہ ع متغیر لا کا قابل تفرق تفاعل ہے اسکا مشتق تفاعل بلحاظ لا کے ع کا جزوی تفرقی سر یا جزوی مشتق کہلاتا ہے اور ہم اسے

جف ع / جف لا

سے تعبیر کرینگے۔

نوٹ:- علامت "جف" جزوی تفرق کا اختصار ہے جف ما / جف لا = $\frac{\partial y}{\partial x}$ (مترجم)

پس $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} = \underset{\text{مف لا} \to \cdot}{\text{نہا}} \frac{\text{فہ(لا + مف لا، ما، ...) - فہ(لا، ما، ...)}}{\text{مف لا}}$ ......(۴)

اسی طرح $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} = \underset{\text{مف ما} \to \cdot}{\text{نہا}} \frac{\text{فہ(لا، ما + مف ما، ...) - فہ(لا، ما، ...)}}{\text{مف ما}}$ ......(۵)

سطح (۲) کی صورت میں ظاہر ہے کہ اگر سطح کو کھپا میں سے مستوی لا = و لا اور ما = و ما کے متوازی مستویوں سے کاٹا جائے تو $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}$ اور $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}}$ بالترتیب ان تراشوں کے ڈھال ہیں۔ شکل میں یہ تراشیں ھک اور ش م ہیں

مثال ۱ — اگر $\text{ی} = \text{لا}^{\text{م}} \text{ما}^{\text{ن}}$ ....(۶)

تو $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = \text{م لا}^{\text{م}-۱} \text{ما}^{\text{ن}}$ اور $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = \text{ن لا}^{\text{م}} \text{ما}^{\text{ن}-۱}$ ....(۷)

مثال ۲ — اگر یہ فرض کر لیں کہ گیس کے دباؤ (د)، حجم (ح)، اور تپش (ط) میں ذیل کا رشتہ ہے

$\text{د} = \frac{\text{ک ط}}{\text{ح}}$ ....(۸)

تو $\frac{\text{جف د}}{\text{جف ح}} = - \frac{\text{ک ط}}{\text{ح}^۲}$ اور $\frac{\text{جف د}}{\text{جف ط}} = \frac{\text{ک}}{\text{ح}}$ ....(۹)

۳۵ — تضمینی تفاعل۔

$\text{فہ(لا، ما)} = \cdot$ ....(۱)

کے نمونہ کی مساوات عموماً ما کو لا کے تفاعل کی شکل میں بیان کرتی ہے۔ کیونکہ اگر ہم لا کو کوئی قیمت دیں تو ما میں حاصل شدہ مساوات کی ایک یا زیادہ معین اصلیں ہونگی۔ یہ اصلیں حقیقی یا خیالی ہو سکتی ہیں لیکن ہم صرف ان صورتوں پر غور کرینگے جنمیں خاص حدود کے اندر لا کی تمام قیمتوں کے لئے ما کی (کم از کم) ایک حقیقی اصل وجود رکھتی ہو۔ اصطلاح تضمینی تفاعل

اس طریقہ [illegible] کئے ہوئے تفاعلوں کے لئے استعمال کی جاتی ہے جنہیں تصریحی تفاعل [illegible] کہتے ہیں جیسے

$$\text{ما} = \text{ف}\,(\text{لا}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

جہاں ما تصریحی طور پر لا کی رقوم میں ظاہر کیا گیا ہے۔

$$\text{ی} = \text{ف}\,(\text{لا}\,،\,\text{ما}) \quad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

اگر (۳) کو ایک سطح کی مساوات تصور کیا جائے تو مساوات (۱) مستوی ی = ج سے سطح کے قطع کی [illegible] ہے۔ اگر مستوی لا ما کو افقی مانا جائے تو ی = ج کی تراشیں [illegible] ج کی مختلف مستقل قیمتوں [illegible] سطح کے "نقشی خطوط" (Contour-lines.) کہلاتے ہیں۔

اگر تضمینی تفاعل کا تفرق کرنا مقصود ہو تو ممکن ہے کہ پہلے مساوات (۱) کو ما کے لحاظ سے حل کیا جائے تا کہ وہ شکل (۲) میں تبدیل ہو جائے [illegible] صورتوں میں [illegible] طریقہ تکلیف دہ یا غیر ممکن ہو [illegible] دریافت کرنا [illegible] لا کے لحاظ سے جزئی تفاعل ف(لا، ما) پر غور کیجئے [illegible] مشتق [illegible] تفاعل مراد ہے جو اس [illegible] لا، ما کی ارقام کے محدود سلسلہ [illegible] جہاں م اور ن صحیح اعداد ۰، ۱، ۲، ۳ [illegible] اختیار کر سکتے ہیں۔ چونکہ مفروضہ کی رو سے ف(لا، ما) ہمیشہ صفر ہے اس لئے لا کے لحاظ سے اس کا مشتق تفاعل بھی صفر ہوگا۔

اب دفعات [illegible] ۳۰ اور ۲۳ کی رو سے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\left(\text{لا}^{\text{م}}\,\text{ما}^{\text{ن}}\right) = \text{م}\,\text{لا}^{\text{م}-۱}\,\text{ما}^{\text{ن}} + \text{ن}\,\text{لا}^{\text{م}}\,\text{ما}^{\text{ن}-۱}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$$

$$\text{اس لئے اگر}\quad \text{ف}\,(\text{لا}\,،\,\text{ما}) = \sum \text{ا}_{\text{م}،\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{م}}\,\text{ما}^{\text{ن}} \quad \ldots\ldots (۴)$$

$$\text{تو}\quad \sum \text{ا}_{\text{م}،\text{ن}}\,\text{م}\,\text{لا}^{\text{م}-۱}\,\text{ما}^{\text{ن}} + \sum \text{ا}_{\text{م}،\text{ن}}\,\text{ن}\,\text{لا}^{\text{م}}\,\text{ما}^{\text{ن}-۱}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۰ \quad \ldots (۵)$$

دفعہ ۴۳ کی ترقیم کے مطابق یہ بشکل ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\frac{\text{جف فہا}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف فہا}}{\text{جف ما}}\cdot\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = ۰ \quad \ldots\ldots (۶)$$

یا

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = -\frac{\dfrac{\text{جف فہا}}{\text{جف لا}}}{\dfrac{\text{جف فہا}}{\text{جف ما}}} \quad \ldots\ldots (۷)$$

چوتھے باب میں ثابت کیا جائیگا کہ نتائج (۶) اور (۷) تفاعل فہا (لا، ما) کی اس خاص صورت تک ہی محدود نہیں ہیں۔ تاہم یہ خاص صورت اکثر ہندسی اطلاقات کے لئے کافی ہے۔

اسئلہ ۵

(تفرق ابتدائی اصولوں سے)

ابتدائی اصولوں سے سوالات ۱ تا ۵ کے تفاعلوں کے مشتق دریافت کرو۔

۱- لا^3، لا^2، $\frac{1}{\text{لا}^2}$، $\frac{1}{\sqrt{\text{لا}}}$

۲- $\frac{1}{\text{لا}+\text{ا}}$، $\frac{\text{لا}+\text{ا}}{\text{لا}-\text{ا}}$، $\frac{1}{\text{لا}^2-\text{ا}^2}$

۳- $\sqrt{\text{لا}^2+\text{ا}^2}$، $\frac{1}{\sqrt{\text{لا}^2+\text{ا}^2}}$

۴- جم لا، قط لا، قتم لا

۵- $\text{جب}^2\,\text{لا}$، $\text{جم}^2\,\text{لا}$، جم ۲لا، جب ۲لا

۶- اگر کسی نقطہ کی خطی حرکت کا ضابطہ

$\text{س} = \text{ع}\,\text{ت} + \frac{1}{2}\,\text{عہ}\,\text{ت}^2$ ہو جہاں ع اور عہ مستقل ہیں تو ثابت کرو کہ وقت ت پر رفتار ع + عہ ت ہے اور اسراع مستقل ہے۔

۷۔ مستقل تپش والی ایک گیس کے دباؤ اور حجم میں رشتہ د ح = مستقل ہے ثابت کرو کہ کعبی لچک د کے مساوی ہے۔

۸۔ اگر کسی دائرہ کا نصف قطر ایک فٹ فی ثانیہ کی شرح سے بڑھ رہا ہو تو رقبہ کی شرح اضافہ مربع فٹ فی ثانیہ اُس آن میں دریافت کرو جبکہ نصف قطر ۱ فٹ ہے۔

۹۔ اگر کسی دائرہ کا رقبہ مستقل شرح سے بڑھ رہا ہو تو ثابت کرو کہ محیط کے اضافہ کی شرح نصف قطر کی معکوس نسبت سے بدلتی ہے۔

۱۰۔ مرکز م اور نصف قطر ایک فٹ والے دائرے کے محیط پر ایک ثابت نقطہ ا ہے۔ ایک نقطہ پ نقطہ ا سے شروع ہو کر یکساں رفتار سے ایک ثانیہ میں محیط کا چکر لگاتا ہے، ذیل کی صورتوں میں اضافہ کی شرح دریافت کرو (۱) قوس اپ، (۲) وتر اپ، (۳) قطاعی رقبہ ا م پ (۴) مثلثی رقبہ ا م پ اس آن میں جبکہ زاویہ ا م پ، ۶۰° ہے۔

۱۱۔ اگر ایک گرام پانی کا حجم ایسے بدلتا ہو جیسے $۱ + \frac{(ط - ۴)^{۲}}{۱۴۴۰۰۰}$ جہاں ط ئی تپش ہے تو حجمی پھیلاؤ کی شرح دریافت کرو جبکہ ط = ۰° اور ط = ۲۰°

امثلہ ۶

(حاصل ضرب اور خارج قسمت)

ذیل کے تفرقات کی تصدیق کرو۔

۱۔ $ما = لا (۱ - لا)$ ، $عف ما = ۱ - ۲ لا$

۲۔ $ما = لا (۱ - لا)^{۲}$ ، $عف ما = (۱ - لا)(۱ - ۳ لا)$

۳۔ $ما = لا^{م} (۱ - لا)^{ن}$ ، $عف ما = لا^{م-۱} (۱ - لا)^{ن-۱} \{م - (م + ن) لا\}$

۴۔ $ما = (لا - ۱)(لا - ۲)(لا - ۳)$ ، $عف ما = ۳ لا^{۲} - ۱۲ لا + ۱۱$

۵۔ $ما = لا (۱ - لا)^{۲} (۱ + لا)^{۳}$ ، $عف ما = (۱ - لا)(۱ + لا)^{۲} (۱ + ۲ لا)(۱ - ۲ لا)$

۶۔ $ما = (۱ + لا^{۲})(۱ - ۲ لا^{۲})$ ، $عف ما = - ۲ لا (۱ + ۴ لا^{۲})$

۷۔ $\text{ما} = \left(\text{لا} + \frac{1}{\text{لا}}\right)^{2}$ — $\text{عف ما} = 2\left(\text{لا} + \frac{1}{\text{لا}}\right)\left(1 - \frac{1}{\text{لا}^{2}}\right)$

۸۔ $\text{ما} = \frac{\text{لا}}{1 - \text{لا}}$ — $\text{عف ما} = \frac{1}{(1 - \text{لا})^{2}}$

۹۔ $\text{ما} = \frac{\text{لا}}{1 + \text{لا}^{2}}$ — $\text{عف ما} = \frac{1 - \text{لا}^{2}}{(1 + \text{لا}^{2})^{2}}$

۱۰۔ $\text{ما} = \frac{1 + \text{لا}^{2}}{1 - \text{لا}^{2}}$ — $\text{عف ما} = \frac{4\,\text{لا}}{(1 - \text{لا}^{2})^{2}}$

۱۱۔ $\text{ما} = \frac{\text{لا}^{\text{م}}}{(1 - \text{لا})^{\text{ن}}}$ — $\text{عف ما} = \frac{\text{لا}^{\text{م}-1}}{(1 - \text{لا})^{\text{ن}+1}}\left\{\text{م} - (\text{م} - \text{ن})\,\text{لا}\right\}$

۱۲۔ $\text{ما} = \text{لا جب لا}$ — $\text{عف ما} = \text{جب لا} + \text{لا جم لا}$

۱۳۔ $\text{ما} = \text{لا}^{2}\,\text{جم لا}$ — $\text{عف ما} = 2\,\text{لا جم لا} - \text{لا}^{2}\,\text{جب لا}$

۱۴۔ $\text{ما} = \text{جب}^{2}\,\text{لا جم لا}$ — $\text{عف ما} = 2\,\text{جب لا} - 3\,\text{جب}^{3}\,\text{لا}$

۱۵۔ $\text{ما} = \frac{\text{جب لا}}{\text{لا}}$ — $\text{عف ما} = \frac{\text{لا جم لا} - \text{جب لا}}{\text{لا}^{2}}$

۱۶۔ $\text{ما} = \frac{\text{لا}}{\text{جب لا}}$ — $\text{عف ما} = \frac{\text{جب لا} - \text{لا جم لا}}{\text{جب}^{2}\,\text{لا}}$

۱۷۔ $\text{ما} = \frac{\text{سس لا}}{\text{لا}}$ — $\text{عف ما} = \frac{\text{لا} - \text{جب لا جم لا}}{\text{لا}^{2}\,\text{جم}^{2}\,\text{لا}}$

۱۸۔ $\text{ما} = \text{سس}^{2}\,\text{لا}$ — $\text{عف ما} = 2\,\text{سس لا}\,\text{قط}^{2}\,\text{لا}$

۱۹۔ $\text{ما} = \text{قط}^{2}\,\text{لا}$ — $\text{عف ما} = 2\,\text{سس لا}\,\text{قط}^{2}\,\text{لا}$

۲۰۔ $\text{ما} = \frac{\text{جب لا}}{1 + \text{سس لا}}$ — $\text{عف ما} = \frac{\text{جم}^{3}\,\text{لا} - \text{جب}^{3}\,\text{لا}}{(\text{جب لا} + \text{جم لا})^{2}}$

۲۱۔ $\text{ما} = \frac{1 + \text{جب لا}}{1 - \text{جب لا}}$ — $\text{عف ما} = \frac{2\,\text{جم لا}}{(1 - \text{جب لا})^{2}}$

۲۲- $تا = \frac{۱ - جم\,لا}{۱ + جم\,لا}$　　$عف\,تا = \frac{۲\,جب\,لا}{(۱ + جم\,لا)^۲}$

امثلہ ۷

تفاعلوں کے تفاعل (۱)

۱- $تا = (لا - ا)^م (لا + ب)^ن$ تو $عف\,تا = (لا - ا)^{م-۱} (لا + ب)^{ن-۱} [(م + ن)لا + م\,ب - ن\,ا]$

۲- $تا = \frac{لا^ن}{(۱ + لا)^ن}$　　$عف\,تا = \frac{ن\,لا^{ن-۱}}{(۱ + لا)^{ن+۱}}$

۳- $تا = \sqrt{۱ + لا}$　　$عف\,تا = \frac{۱}{۲\sqrt{۱ + لا}}$

۴- $تا = \sqrt{(لا + ۱)(لا + ۲)}$　　$عف\,تا = \frac{۲لا + ۳}{۲\sqrt{(لا + ۱)(لا + ۲)}}$

۵- $تا = (۱ + لا)\sqrt{۱ - لا}$　　$عف\,تا = \frac{۱ - ۳لا}{۲\sqrt{۱ - لا}}$

۶- $تا = (۱ - لا)\sqrt{۱ + لا^۲}$　　$عف\,تا = -\frac{(۱ - لا + ۲لا^۲)}{\sqrt{۱ + لا^۲}}$

۷- $تا = \frac{۱}{\sqrt{۱ - لا^۲}}$　　$عف\,تا = \frac{لا}{(۱ - لا^۲)^{۳/۲}}$

۸- $تا = \frac{لا}{\sqrt{۱ + لا^۲}}$　　$عف\,تا = \frac{۱}{(۱ + لا^۲)^{۳/۲}}$

۹- $تا = \frac{\sqrt{۱ + لا^۲}}{لا}$　　$عف\,تا = -\frac{۱}{لا^۲\sqrt{۱ + لا^۲}}$

۱۰- $تا = \frac{\sqrt{۱ + لا}}{\sqrt{۱ - لا}}$　　$عف\,تا = \frac{۱}{(۱ - لا)\sqrt{۱ - لا^۲}}$

۱۱- $\text{ما} = \dfrac{1}{\text{لا} + \sqrt{1+\text{لا}^2}}$ $\qquad$ $\text{عف ما} = \dfrac{\text{لا}}{\sqrt{\text{لا}^2+1}} - 1$

۱۲- $\text{ما} = \dfrac{\text{لا}}{\text{لا} + \sqrt{1+\text{لا}^2}}$ $\qquad$ $\text{عف ما} = \dfrac{1+2\,\text{لا}^2}{\sqrt{1+\text{لا}^2}} - 2\,\text{لا}$

۱۳- $\text{ما} = \sqrt{\dfrac{1+\text{لا}+\text{لا}^2}{1-\text{لا}+\text{لا}^2}}$ $\qquad$ $\text{عف ما} = \dfrac{1-\text{لا}^2}{\sqrt{1+\text{لا}+\text{لا}^2}\,(1-\text{لا}+\text{لا}^2)^{\frac{3}{2}}}$

۱۴- $\text{ما} = \text{جب}\,2(\text{لا} - \text{عہ})$ $\qquad$ $\text{عف ما} = 2\,\text{جم}\,2(\text{لا} - \text{عہ})$

۱۵- $\text{ما} = \text{جب}^2\,2\,\text{لا}$ $\qquad$ $\text{عف ما} = 2\,\text{جب}\,4\,\text{لا}$

۱۶- $\text{ما} = \sqrt{1+\text{جب لا}}$ $\qquad$ $\text{عف ما} = \frac{1}{2}\sqrt{1-\text{جب لا}}$

۱۷- $\text{ما} = \text{مس}^2\,\text{لا}$ $\qquad$ $\text{عف ما} = \dfrac{2\,\text{جب لا}}{\text{جم}^3\,\text{لا}}$

۱۸- $\text{ما} = \text{قط}^2\,\text{لا}$ $\qquad$ $\text{عف ما} = \dfrac{2\,\text{جب لا}}{\text{جم}^3\,\text{لا}}$

۱۹- $\text{ما} = \text{مس}^3\,\text{لا}$ $\qquad$ $\text{عف ما} = \dfrac{3\,\text{جب لا}}{\text{جم}^4\,\text{لا}}$

۲۰- $\text{ما} = \text{جب}^3\,\text{لا} + \text{جم}^3\,\text{لا}$ $\qquad$ $\text{عف ما} = 3\,\text{جب لا}\,\text{جم لا}\,(\text{جب لا} - \text{جم لا})$

۲۱- $\text{ما} = \text{جب لا} - \frac{1}{3}\text{جب}^3\,\text{لا}$ ، $\text{عف ما} = \text{جم}^3\,\text{لا}$

۲۲- $\text{ما} = \text{مس لا} + \frac{1}{3}\text{مس}^3\,\text{لا}$ ، $\text{عف ما} = \text{قط}^4\,\text{لا}$

۲۳- $\text{ما} = \frac{1}{\text{لا}^2}\,\text{جب}^2\,\text{لا}$ ، $\text{عف ما} = \dfrac{2\,\text{جب لا}}{\text{لا}^3}\,(\text{لا}\,\text{جم لا} - \text{جب لا})$

۲۴- $\text{ما} = \text{جب}^{\text{م}}\,\text{لا}\;\text{جب ن لا}$ ، $\text{عف ما} = \text{ن}\,\text{جب}^{\text{م}}\,\text{لا}\;\text{جم ن لا} + \text{م}\,\text{جم}^{\text{م}}\,\text{لا}\;\text{جب ن لا}$

۲۵- $\text{ما} = \sqrt{\text{عہ}\,\text{جب}^2\,\text{لا} + \text{بہ}\,\text{جم}^2\,\text{لا}}$ ، $\text{عف ما} = \frac{1}{2}(\text{عہ} - \text{بہ})\dfrac{\text{جب}\,2\,\text{لا}}{\sqrt{\text{عہ}\,\text{جب}^2\,\text{لا} + \text{بہ}\,\text{جم}^2\,\text{لا}}}$

امشلہ ۹

مقلوب تفاعل

۱- $\text{ما} = \text{جب}^{-1}(\text{۱} - \text{لا})$ 　　 $\text{عف ما} = -\dfrac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۲لا} - \text{لا}^{\text{۲}}}}$

۲- $\text{ما} = \text{لا}\ \text{جب}^{-1}\text{لا}$ 　　 $\text{عف ما} = \text{جب}^{-1}\text{لا} + \dfrac{\text{لا}}{\sqrt{\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}}}}$

۳- $\text{ما} = \text{مم}^{-1}\text{لا}$ 　　 $\text{عف ما} = -\dfrac{\text{۱}}{\text{۱} + \text{لا}^{\text{۲}}}$

۴- $\text{ما} = \text{قط}^{-1}\text{لا}$ 　　 $\text{عف ما} = \dfrac{\text{۱}}{\text{لا}\sqrt{\text{لا}^{\text{۲}} - \text{۱}}}$

۵- $\text{ما} = \text{قم}^{-1}\text{لا}$ 　　 $\text{عف ما} = -\dfrac{\text{۱}}{\text{لا}\sqrt{\text{لا}^{\text{۲}} - \text{۱}}}$

۶- $\text{ما} = \text{جب}^{-1}\text{لا} + \text{جب}^{-1}\sqrt{\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}}}$ 　　 $\text{عف ما} = \text{۰}$

۷- $\text{ما} = \text{سس}^{-1}\text{لا} + \text{سس}^{-1}\dfrac{\text{۱}}{\text{لا}}$ 　　 $\text{عف ما} = \text{۰}$

۸- $\text{ما} = \text{جب}^{-1}\left\{\text{۲لا}\sqrt{\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}}}\right\}$ 　　 $\text{عف ما} = \dfrac{\text{۲}}{\sqrt{\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}}}}$

۹- $\text{ما} = \text{سس}^{-1}\dfrac{\text{۲لا}}{\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}}}$ 　　 $\text{عف ما} = \dfrac{\text{۲}}{\text{۱} + \text{لا}^{\text{۲}}}$

۱۰- $\text{ما} = \text{جم}^{-1}\dfrac{\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}}}{\text{۱} + \text{لا}^{\text{۲}}}$ 　　 $\text{عف ما} = \dfrac{\text{۲}}{\text{۱} + \text{لا}^{\text{۲}}}$

۱۱- $\text{ما} = \text{سس}^{-1}\dfrac{\text{سس عا جب لا}}{\text{قط عا} - \text{جم لا}}$ 　　 $\text{عف ما} = -\dfrac{\text{سس عا}}{\text{قط عا} + \text{جم لا}}$

۱۲- $ما = مس^{-1}\{\sqrt{لا^2+1} - لا\}$　　　عف ما $= -\frac{1}{2(لا^2+1)}$

۱۳- $ما = جب^{-1}(جم\, لا)$　　　عف ما $= 1$

امثلہ ۹

(۱)- مسئلہ $\frac{د}{د\,لا}\{فما\, ک\, لا\} = ک\, فما\, ک\, لا$

کی ہندسی تعبیر بیان کرو۔

(۲)- اگر $ما = مس^{-1}\frac{ع}{و}$ تو ثابت کرو کہ عف ما $= \frac{و\, عف\, ع - ع\, عف\, و}{ع^2 + و^2}$

(۳) یہ مانکر کہ $\frac{1 - لا^{ن+1}}{1 - لا} = 1 + لا + لا^2 + \ldots + لا^ن$، تفرق کرنے سے

سلسلہ $1 + 2لا + 3لا^2 + \ldots + ن\, لا^{ن-1}$ کا حاصل جمع دریافت کرو۔ اور لا = ۱ رکھکر نتیجہ کی تصدیق کرو۔ پس ثابت کرو کہ اگر |لا| < ۱ تو $1 + 2لا + 3لا^2 + 4لا^3 + \ldots$ مؤنک $= (1 - لا)^{-2}$

(۴)- اگر ایک نقطہ کی خطی حرکت میں $و^2$ فاصلہ س کا خطی تفاعل ہو تو اسراع مستقل ہوگا

(۵)- نیز اگر $و^2$ فاصلہ س کا دو درجی تفاعل ہو، تو اسراع خط حرکت میں کسی ثابت نقطہ سے فاصلہ کے متناسب ہے۔

(۶)- اگر وقت کے طے شدہ فاصلہ کا دو درجی تفاعل ہو تو اسراع ایسے بدلتا ہے جیسے رفتار کی تیسری قوت۔

(۷)- اگر $و^2 = ا + \frac{ب}{س}$

تو اسراع خط حرکت میں سے کسی ثابت نقطہ سے فاصلہ کے مربع کے معکوس کے طور پر بدلتا ہے۔

(۸)- اگر س، وقت ت کا دو درجی تفاعل ہو تو اسراع $\frac{1}{س^3}$ کے متناسب ہے۔

۹- اگر گیس کے حجم اور دباؤ میں رشتہ د ح^{ک}ما = مستقل ہو تو لچک کو د کے مساوی ہے -

اسئلہ ۱۰

(جزوی تفرق)

۱- سطح ر ی = لا^۲ + ما^۲ کے نقشی خطوط کھینچو اور سطح کی عام شکل بیان کرو -

۲- نیز سطح ا ی = لا ما کے نقشی (Contour) خطوط کھینچو اور سطح کی عام شکل بیان کرو -

۳- اگر ی = ف (لا + ما)

تو ثابت کرو کہ جف ی / جف لا = جف ی / جف ما اور اس نتیجہ کی ہندسی تعبیر بتاؤ -

۴- اگر ر = √(لا^۲ + ما^۲)

تو ثابت کرو کہ ر جف ر / جف لا = لا اور ر جف ر / جف ما = ما

۵- اگر ی = ا سن^{-۱} ما / لا

تو ثابت کرو کہ جف ی / جف لا = - ا ما / (لا^۲ + ما^۲) اور جف ی / جف ما = ا لا / (لا^۲ + ما^۲)

۶- اگر ی = ف (لا^۲ + ما^۲)

تو ثابت کرو کہ جف ی / جف لا : جف ی / جف ما = لا : ما

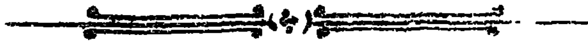
۷- اگر ی = ف (ما / لا)

تو ثابت کرو کہ لا جف ی / جف لا + ما جف ی / جف ما = ۰

٨۔ اگر ا لا² + ٢ ھ لا ما + ب ما² + ٢ گ لا + ٢ ف ما + ج = ٠

تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{ذ ما}}{\text{ذ لا}} = -\,\frac{\text{ا لا + ھ ما + گ}}{\text{ھ لا + ب ما + ف}}$$



تیسرا باب

قوت نما تفاعل اور لوگارتھمی تفاعل

۳۶۔ قوت نما تفاعل: تفاعل زیر بحث کی تعریف کئی طرح کیجا سکتی ہے لیکن علم احصا اور اس کے اکثر اطلاقات کے مد نظر ذیل کی تعریف زیادہ موزوں ہوگی۔ اس تفاعل کی اساسی خاصیت ہے کہ یہ

$$\frac{تف\ ما}{تف\ لا} = ک\ ما \qquad (۱)$$

کے نمونہ کی مساوات کو پورا کرتا ہے جہاں ک مثبت یا منفی مستقل ہے۔ اسے الفاظ میں اس طرح بیان کر سکتے ہیں کہ کسی آن میں تفاعل کے اضافہ کی شرح کو تفاعل کی اسی آن کی قیمت کے ساتھ ایک مستقل نسبت ہوتی ہے
مذکورہ بالا تعریف والے عام قوت نما تفاعل[1] کا مقابلہ خطی تفاعل،

$$ما = ا + ب\ لا \qquad (۲)$$

کے ساتھ کیا جا سکتا ہے۔ اس کو خطی تفاعل کہنے کی وجہ یہ ہے کہ اس کی ترسیم ایک سیدھا خط ہے۔ درحقیقت ان دونوں میں وہی رشتہ ہے جو سود مرکب کو سود مفرد کے ساتھ ہے بشرطیکہ سود مرکب مستقل وقفوں کے بعد جمع ہونے کی بجائے مسلسل جمع ہوتا رہے۔

---

[1] بعد میں معلوم ہوگا کہ اگر لا ناطق مقدار ہے تو یہ لازماً ج^لا کی شکل کا ہوگا اور اصطلاح "قوت نما" تفاعل کی وجہ بھی یہ ہے کہ اس میں متغیر لا بطور قوت نما کے شریک ہوتا ہے۔

تمام ضمنی تفاعل میں جو مستقل ہیں یعنی مثلاً ب اور ابتدائی قیمت ا۔
اگر یہ بار [illegible] سے کافی طور پر واضح نہ ہوتا تو ہم غالباً معیاری ضمنی تفاعل
اسے لیتے جسکا [illegible] اور ابتدائی قیمت دونوں ایک کے مساوی ہوں یعنی

ما = ۱ ، لا .... (۱)

[illegible] ہم [illegible] کو مناسب طور پر بدلنے سے [illegible] حاصل ہوتا ہے

[illegible] تمام [illegible] مستقل [illegible] شریک [illegible] یعنی [illegible]
[illegible] مستقل [illegible] ابتدائی قیمت [illegible] فرض کرو کہ ج ہے۔
ابھی ثابت کیا جا چکا ہے کہ جب مستقل تفاعل کو [illegible] تعین کر دیتے
ہیں اس تفاعل کو معیاری تفاعل کہتے جس میں ک = ۱ اور جس کی ابتدائی
قیمت [illegible] ایک ہے۔

[illegible] قوت نما تفاعل کی تعریف مساوات

$$\frac{ف ما}{ف لا} = ما \quad .... (۲)$$

[illegible] ایک ہے جبکہ لا = ۰

[illegible] قوت نما [illegible] ثابت کرنا ہے [illegible]

تفاعل کا وجود ہے [illegible] اگر [illegible] کوئی [illegible] دریافت کرنا ہے [illegible]
[illegible] قیمت [illegible] تفاعل کی قیمت [illegible] مساوی [illegible] مقام [illegible]
[illegible] فرض کرو کہ مساوات

$$\frac{ف ما}{ف لا} = ما \quad .... (۱)$$

[illegible] حاصل جمع ہے

$$ما = ۱ + ا_۱ لا + ا_۲ لا^۲ + ... + ا_ن لا^ن + ... \quad (۲)$$

اس کی پہلی رقم اس شرط کے ماتحت متعین ہوتی ہے کہ ما = ۱ جبکہ لا = ۰
اس مفروضہ کی بنا پر کہ ما کا یہ لامتناہی سلسلہ اسی ضابطہ کے لگانے سے تفرق کیا جاسکتا ہے جو دفعہ ۲۹ میں محدود سلسلوں کے لئے دیا گیا ہے ہمیں حاصل ہوگا

$$\frac{\text{ف ما}}{\text{ف لا}} = \text{ا}_1 + 2\,\text{ا}_2\,\text{لا} + 3\,\text{ا}_3\,\text{لا}^2 + \ldots + \text{ن}\,\text{ا}_{\text{ن}}\,\text{لا}^{\text{ن}-1} + \ldots \quad (۳)$$

اور مساوات (۱) پوری ہوگی بشرطیکہ

$$\text{ا}_1 = 1,\ 2\,\text{ا}_2 = \text{ا}_1,\ 3\,\text{ا}_3 = \text{ا}_2,\ \ldots,\ \text{ن}\,\text{ا}_{\text{ن}} = \text{ا}_{\text{ن}-1},\ \ldots \quad (۴)$$

یعنی $\text{ا}_\circ = 1,\ \text{ا}_1 = 1,\ \text{ا}_2 = \frac{1}{2!},\ \text{ا}_3 = \frac{1}{3!},\ \ldots$

اور اسی طرح بالعموم $\text{ا}_{\text{ن}} = \frac{1}{\text{ن}!} \quad \ldots\ldots (۵)$

پس ہم سلسلہ $1 + \text{لا} + \frac{\text{لا}^2}{2!} + \frac{\text{لا}^3}{3!} + \ldots + \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\text{ن}!} + \ldots\ldots (۶)$

کے مطالعہ پر مجبور ہیں ۔ یہ سلسلہ متدق ہے اور لا کی کسی دی ہوئی قیمت کے لئے اس کا حاصل جمع [illegible] کے متدق ہونے کی وجہ یہ ہے (ن + ۱) ویں اور ن [illegible] مطلق قیمت ن کو کافی بڑا لیے [illegible] کی جاسکتی ہے پس اس سلسلہ میں ہمیشہ ایک مقام ایسا [illegible] کے بعد کی رقمیں کسی بھی ہندسی سلسلے کی رقموں [illegible] ہیں ۔ اس لئے دفعہ (۵) کے مطابق [illegible] متدق ہی نہیں بلکہ مطلق طور پر متدق ہے ۔ اس کے حاصل جمع کو ہم ق (لا) سے ظاہر کرینگے ۔
اب ہم ثابت کرینگے کہ تفاعل ق (لا) جسکی تعیین حسب بالا ہوتی ہے مسلسل اور قابل تفرق ہے اور یہ دراصل مساوات (۱) کو پورا کرتا ہے ۔

اب فرض کرو کہ

$$\text{م}(\text{لا}) = \tfrac{1}{2}\left[\text{ق}(\text{لا}) + \text{ق}(-\text{لا})\right] = 1 + \frac{\text{لا}^2}{\underline{|2}} + \frac{\text{لا}^4}{\underline{|4}} + \dots + \frac{\text{لا}^{2\text{ن}}}{\underline{|2\text{ن}}} + \dots\dots$$

$$\text{اور ج}(\text{لا}) = \tfrac{1}{2}\left[\text{ق}(\text{لا}) - \text{ق}(-\text{لا})\right] = \text{لا} + \frac{\text{لا}^3}{\underline{|3}} + \frac{\text{لا}^5}{\underline{|5}} + \dots + \frac{\text{لا}^{2\text{ن}+1}}{\underline{|2\text{ن}+1}} + \dots \quad (8)$$

$$\text{پس ق}(\text{لا}) = \text{م}(\text{لا}) + \text{ج}(\text{لا}) \quad \text{اور ق}(-\text{لا}) = \text{م}(\text{لا}) - \text{ج}(\text{لا}) \quad \dots(9)$$

یہ صاف ظاہر ہے کہ م (لا) کی تمام رقمیں مثبت ہیں اور ج (لا) کی تمام رقموں کی وہی علامت ہے جو لا کی۔ آئندہ کی بحث میں اس خاصیت کی رو سے سہولت پیدا ہوگی۔

اگر لا_1 اور لا متغیر کی دو قیمتیں ہوں جنہیں ہم ایک ہی علامت کا فرض کر لیتے ہیں تو دفعہ ۵ کے ضابطہ (آ) اور (ب) کی رو سے ذیل کی مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔

$$\text{م}(\text{لا}_1) - \text{م}(\text{لا}) = \frac{\text{لا}_1^2 - \text{لا}^2}{\underline{|2}} + \frac{\text{لا}_1^4 - \text{لا}^4}{\underline{|4}} + \dots + \frac{\text{لا}_1^{2\text{ن}} - \text{لا}^{2\text{ن}}}{\underline{|2\text{ن}}} + \dots\dots$$

$$= (\text{لا}_1 - \text{لا})\left\{ \frac{\text{لا}_1 + \text{لا}}{\underline{|2}} + \frac{\text{لا}_1^3 + \text{لا}_1^2\text{لا} + \text{لا}_1\text{لا}^2 + \text{لا}^3}{\underline{|4}} + \dots \right.$$

$$\left. + \frac{\text{لا}_1^{2\text{ن}-1} + \text{لا}_1^{2\text{ن}-2}\text{لا} + \dots + \text{لا}^{2\text{ن}-1}}{\underline{|2\text{ن}}} + \dots \right\} \quad \dots(10)$$

فرض کرو کہ ظ ایسی مثبت مقدار ہے کہ وہ لا_1 اور لا میں سے بڑی مقدار کی مطلق قیمت کے مساوی ہے۔

$$\text{تو} \left|\text{لا}_1^{2\text{ن}-1} + \text{لا}_1^{2\text{ن}-2}\text{لا} + \dots + \text{لا}^{2\text{ن}-1}\right| < 2\text{ن ظ}^{2\text{ن}-1} \quad \dots\dots(11)$$

اور نتیجہ (۱۰) میں خطوط وحدانی { } کے درمیان کا سلسلہ مطلق قیمت کے لحاظ سے

$$\text{ظ} + \frac{\text{ظ}^3}{\underline{|3}} + \dots + \frac{\text{ظ}^{2\text{ن}-1}}{\underline{|2\text{ن}-1}} + \dots$$

سے کم ہے یعنی ج (ظ) سے

کم ہے جو خود محدود ہے۔ اس لئے

$$\text{نہا}_{لا_۱ \to لا} \{ م(لا_۱) - م(لا) \} = \quad \ldots\ldots (۱۲)$$

اس لئے تفاعل م (لا) متغیر لا کی تمام قیمتوں کے لئے مسلسل ہے۔ اسیطرح ثابت کیا جا سکتا ہے کہ ج (لا) بھی مسلسل ہے۔ اب نتیجہ (۹) سے ق (لا) کا تسلسل ثابت ہوتا ہے، نیز (۱۰) سے

$$\frac{م(لا_۱) - م(لا)}{لا_۱ - لا} = \frac{لا_۱ + لا}{\lfloor ۱} + \frac{لا_۱^۳ + لا_۱^۲ لا + لا_۱ لا^۲ + لا^۳}{\lfloor ۳} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{لا_۱^{۲ن-۱} + لا_۱^{۲ن-۲} لا + \ldots + لا^{۲ن-۱}}{\lfloor ۲ن-۱} + \ldots \quad (۱۳)$$

بائیں جانب کی رقمیں ایک علامت کی ہیں خواہ لا اور لا۱ مثبت ہوں یا منفی۔ اس لئے مساوات (۱۳) میں آخری رقم کے شمار کنندہ کی قیمت $۲ن\,لا^{۲ن-۱}$ اور $۲ن\,لا_۱^{۲ن-۱}$ کے درمیان ہوگی اور اس لئے سلسلہ کا حاصل جمع ج (لا) اور ج (لا۱) کے درمیان ہوگا۔ چونکہ ج (لا) مسلسل تفاعل ہے اسلئے

$$\text{نہا}_{لا_۱ \to لا} \frac{م(لا_۱) - م(لا)}{لا_۱ - لا} = ج(لا) \quad \ldots\ldots\ldots (۱۴)$$

یعنی $م'(لا) = ج(لا) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (۱۵)$

اور اسی طرح ثابت کیا جا سکتا ہے کہ

$$ج'(لا) = م(لا) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (۱۶)$$

$$\text{پس}\quad ق'(لا) = \frac{ف}{ف\,لا}\{م(لا) + ج(لا)\}$$

$$= م'(لا) + ج'(لا)$$

$$= ج(لا) + م(لا) = ق(لا) \quad \ldots\ldots (۱۷)$$

اس لئے رشتہ ما = ق (لا)، لا کی تمام قیمتوں کے لئے مساوات (۱) کو پورا کرتا ہے۔

نیز ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ مساوات (۱) کا حل جو شرط ما = ۱ ' لا = ۰ کے تابع حاصل ہوتا ہے یگانہ حل ہے۔ کیونکہ اگر ع اور و دو ایسے حل ہوں

تو $\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} = \text{و} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = \text{ع}$ .... (۱۸)

یعنی $\text{و} \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} - \text{ع} \frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} = ۰$ .... (۱۹)

یا $\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}} \left(\frac{\text{ع}}{\text{و}} \right) = ۰$ .... (۲۰)

اس لئے ثابت ہوا کہ $\frac{\text{ع}}{\text{و}}$ کی نسبت مستقل* ہے۔ اور اگر ع = ۱ ' و = ۱ جبکہ لا = ۰ تو اس مستقل کا ایک ہونا ضروری ہے پس ع = و

۳۸ ـ مسئلہ ثانی اور ق (لا) کی ترمیم ـ

عام تر مساوات $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ک ما}$ .... (۱)

ذیل کی صورت میں لکھی جا سکتی ہے

$\frac{\text{فرما}}{\text{فر(ک لا)}} = \text{ما}$ .... (۲)

اور اسلئے اسکا حل بشرط ما = ۱ ' لا = ۰ کے ماتحت ما = ق (ک لا) ....(۳) ہوگا۔
اب فرض کرو کہ

ع = ق (الا) × ق (ب لا) .... (۴)

تو $\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = \text{ا ق (الا)} \times \text{ق (ب لا)} + \text{ب ق (ب لا)} \times \text{ق (الا)}$

---

* اس میں ہم نے ایک بالکل ظاہر مسئلہ کو مان لیا ہے جس کا باضابطہ ثبوت دفعہ ۵۶ میں دیا جائیگا۔

= (ا + ب) ق (ا لا) × ق (ب لا) = (ا + ب) × ع . . . . (۵)

نیز ع کی ابتدائی قیمت ایک ہے ۔ پس

ع = ق { (ا + ب) لا } . . . . (۶)

یعنی ا اور ب کی تمام قیمتوں کے لئے

ق (ا) × ق (ب) = ق (ا + ب) . . . . (۷)

یہ قوت نما تفاعلوں کا "مسئلہ جمع" کہلاتا ہے ۔

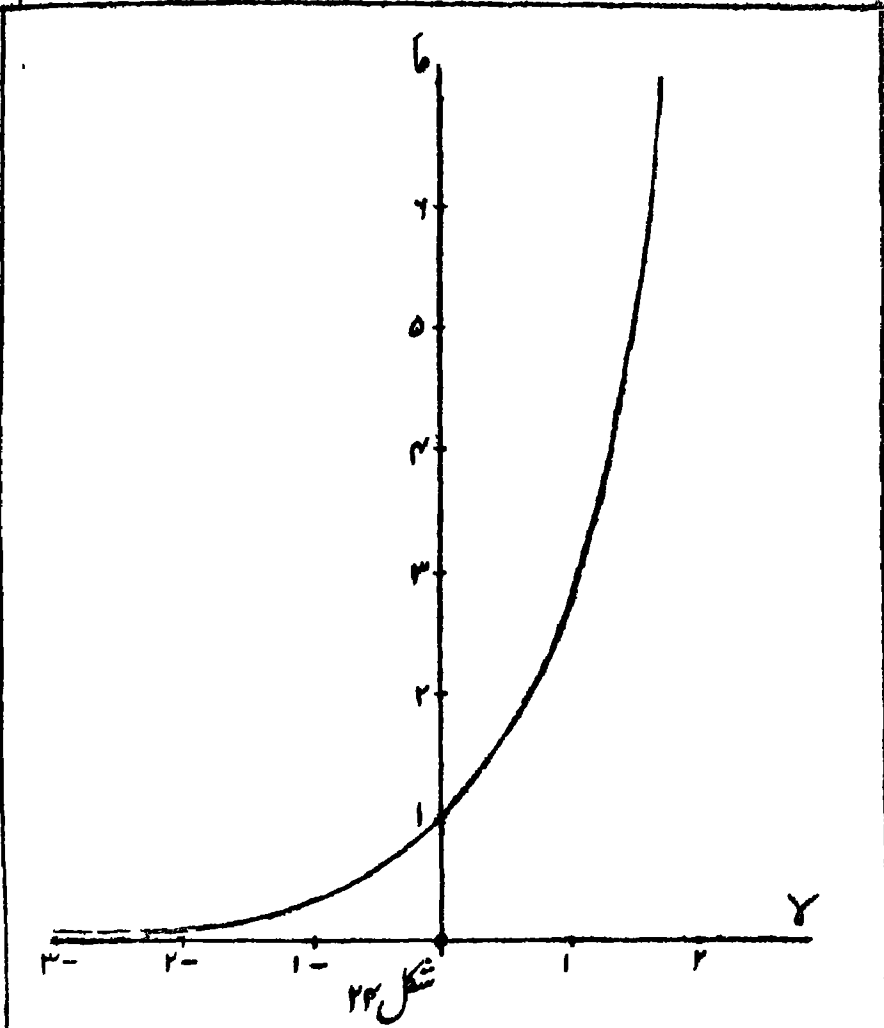
خصوصاً ق (لا) × ق (-لا) = ق (۰) = ۱ . . . . (۸)

یعنی ق (-لا) = $\frac{1}{\text{ق (لا)}}$ . . . . (۹)

ہم نے پہلے ثابت کیا ہے کہ تفاعل ق (لا) مسلسل ہے ۔ نیز لا کی مثبت قیمتوں کے لئے ق (لا) کے سلسلہ کی ہر ایک رقم لا کے ساتھ بڑھتی ہے اور لا ← + ∞ کے لئے لا انتہا بڑی ہو جاتی ہے ۔ اس لئے حاصل جمع کے لئے بھی یہ بات ضروری طور پر صحیح ہے ۔

علاوہ اس کے (۹) سے ظاہر ہے کہ اگر لا مثبت ہو تو ق (-لا) بھی مثبت ہوتا ہے اور مطلق قیمت میں کم ہوتا ہے جیسے لا بڑھتا ہے اور لا ← ∞ کے لئے صفر ہو جاتا ہے ۔ اس لئے جیسے لا کی قیمت -∞ سے + ∞ تک بڑھتی ہے تفاعل ق (لا) مسلسل طور پر صفر سے + ∞ تک بڑھتا ہے اور ہر ایک درمیانی قیمت صرف ایک ہی مرتبہ اختیار کرتا ہے ۔

صفحہ ۱۱۰ کی شکل منحنی ما = ق (لا) کی ترسیم ہے ۔ اور تفاعل ق (لا) کی عددی قیمتوں کا تختہ کتاب کے ختم پر جدول (ع) میں دیا گیا ہے ۔



شکل ۲۴

۳۹- عدد قو۔

دفعہ ۳۸ کے نتیجہ (۷) کی توسیع حسب ذیل کیجا سکتی ہے:-

ق(ا)×ق(ب)×ق(ج) = ق(ا+ب)×ق(ج) = ق(ا+ب+ج) .... (۱)

اور اسی طرح اجزاء ضربی کی کسی تعداد کے لئے۔

اگر ہم ن اجزاء کو جنمیں سے ہر ایک ق(ا) کے مساوی ہے آپسمیں ضرب

دیں تو

{ق(۱)}ⁿ = ق(۱+۱+ ..... ن رقموں تک) = ق(ن) ..... (۲)

مقدار ق(۱) یعنی سلسلہ

۱+۱+ ۱/۲ + ۱/۳ + ... (۳)

کو ہم علامت "قو" سے تعبیر کرینگے۔ اعشاریہ کے سات مقام تک اسکی قیمت ہے

قو = ۲٫۷۱۸۲۸۱۸

اس ترقیم میں اگر ن کوئی مثبت صحیح عدد ہو تو

ق(ن) = قوⁿ ..... (۴)

نیز اگر م/ن مفرد ترین رقوم میں کوئی حسابی منطق کسر ہو تو

{ق(م/ن)}ⁿ = ق(م/ن + م/ن + ... ن رقموں تک) = ق(م) = قوᵐ

اور اس لئے　ق(م/ن) = قو^(م/ن) ..... (۵)

پس اگر لا کوئی مثبت منطق مقدار ہو صحیح عدد یا کسر تو

ق(لا) = قوˡᵃ ..... (۶)

اب دفعہ ۳۸ (۹) سے حاصل ہوتا ہے کہ

ق(-لا) = ۱/ق(لا) = ۱/قوˡᵃ = قو⁻ˡᵃ

یعنی نتیجہ (۶) لا کی تمام منطق قیمتوں کے لئے صحیح ہے خواہ یہ مثبت ہوں یا منفی۔ یہ قابل توجہ ہے کہ لا کے غیر منطق ہونے کی صورت میں علامت قوˡᵃ کی (ہنوز) تعریف نہیں کی گئی۔ اب ہم اس کی تعریف یوں کر سکتے ہیں کہ

یہ ق(لا) کے سلسلے کے حاصل جمع کو تعبیر کرنے کے لئے ایک اور علامت ہے۔ اس تعریف کا فائدہ یہ ہے کہ اس طریق کتابت سے ان جبریہ قوانین کی یاددہانی ہوتی ہے جنکو یہ تفاعل پورا کرتا ہے۔ پس

فو^لا × فو^ما = ق(لا) × ق(ما) = ق(لا + ما) = فو^(لا + ما)

جہاں لا اور ما منطق یا غیر منطق ہو سکتے ہیں۔

فو کی قیمت نکالنے کا عمل بالکل آسان ہے سلسلہ (۳) کی پہلی (۱۳) رقمیں یہ ہیں

۱ + ۱ = ۲	$\frac{1}{\lfloor 7}$ = ۰۰۰۱۹۸۴۱۳ء
$\frac{1}{\lfloor 2}$ = ۵ء	$\frac{1}{\lfloor 8}$ = ۰۰۰۰۲۴۸۰۲ء
$\frac{1}{\lfloor 3}$ = ۱۶۶۶۶۶۶۶۷ء	$\frac{1}{\lfloor 9}$ = ۰۰۰۰۰۲۷۵۶ء
$\frac{1}{\lfloor 4}$ = ۰۴۱۶۶۶۶۶۷ء	$\frac{1}{\lfloor 10}$ = ۰۰۰۰۰۰۲۷۶ء
$\frac{1}{\lfloor 5}$ = ۰۰۸۳۳۳۳۳۳ء	$\frac{1}{\lfloor 11}$ = ۰۰۰۰۰۰۰۲۵ء
$\frac{1}{\lfloor 6}$ = ۰۰۱۳۸۸۸۸۹ء	$\frac{1}{\lfloor 12}$ = ۰۰۰۰۰۰۰۰۲ء

ان ہندسوں کا حاصل جمع ۲ء۷۱۸۲۸۱۸۳۰ ہے، باقی رقموں کو نظر انداز کر دینے سے جو غلطی یا خطا پیدا ہوتی ہے وہ سلسلہ $\frac{1}{\lfloor 13} + \frac{1}{\lfloor 14} + \ldots$ کے حاصل جمع کے مساوی ہے۔

یہ سلسلہ کم ہے $\frac{1}{\lfloor 13}\left[1 + \frac{1}{13} + \frac{1}{13^2} + \ldots\right]$ یعنی $\frac{1}{12\lfloor 12}$ سے اور اس لئے اسکا اعشاریہ کے نویں مقام پر کوئی اثر نہیں پڑیگا۔ پس اوپر کی جدول میں آخری ہندسوں کی خطاؤں کے لئے گنجائش چھوڑتے ہوئے ہم اطمینان سے کہہ سکتے ہیں کہ اوپر کے نتیجہ سے اعشاریہ کے سات مقام تک فو کی صحیح قیمت حاصل ہوتی ہے۔

۴۰ — زائدی تفاعل :- قوت نما تفاعل سے جدا یہ مرکب کیا

جن کے خواص عام مثلث کے عام تفاعلوں کے خواص کے ساتھ باقاعدہ مشابہت رکھتے ہیں، ان تفاعلوں کو ہم زائدی جیب، جیب التمام، مماس وغیرہ* کہینگے۔ انکی تعریفیں ذیل میں دی جاتی ہیں۔

$$\text{جبز لا} = \frac{1}{2}\left(\text{قو}^{\text{لا}} - \text{قو}^{-\text{لا}}\right) = \text{لا} + \frac{\text{لا}^3}{\lfloor 3} + \frac{\text{لا}^5}{\lfloor 5} + \cdots \quad †$$

$$\text{جمز لا} = \frac{1}{2}\left(\text{قو}^{\text{لا}} + \text{قو}^{-\text{لا}}\right) = 1 + \frac{\text{لا}^2}{\lfloor 2} + \frac{\text{لا}^4}{\lfloor 4} + \cdots \qquad \ldots(۱)$$

$$\text{مسز لا} = \frac{\text{جبز لا}}{\text{جمز لا}} ، \quad \text{قطز لا} = \frac{1}{\text{جمز لا}}$$

$$\text{ممز لا} = \frac{\text{جمز لا}}{\text{جبز لا}} ، \quad \text{قمز لا} = \frac{1}{\text{جبز لا}} \qquad \ldots(۲)$$

ہم دیکھتے ہیں کہ جمز لا تفاعل جم لا کی طرح جفت تفاعل ہے یعنی لا کی بجائے -لا لکھنے سے اسکی قیمت میں کوئی فرق نہیں آتا اور برخلاف اسکے جبز لا تفاعل جب لا کی طرح طاق تفاعل ہے یعنی لا کی بجائے -لا لکھنے سے تفاعل کی مطلق قیمت وہی رہتی ہے لیکن علامت بدل جاتی ہے۔

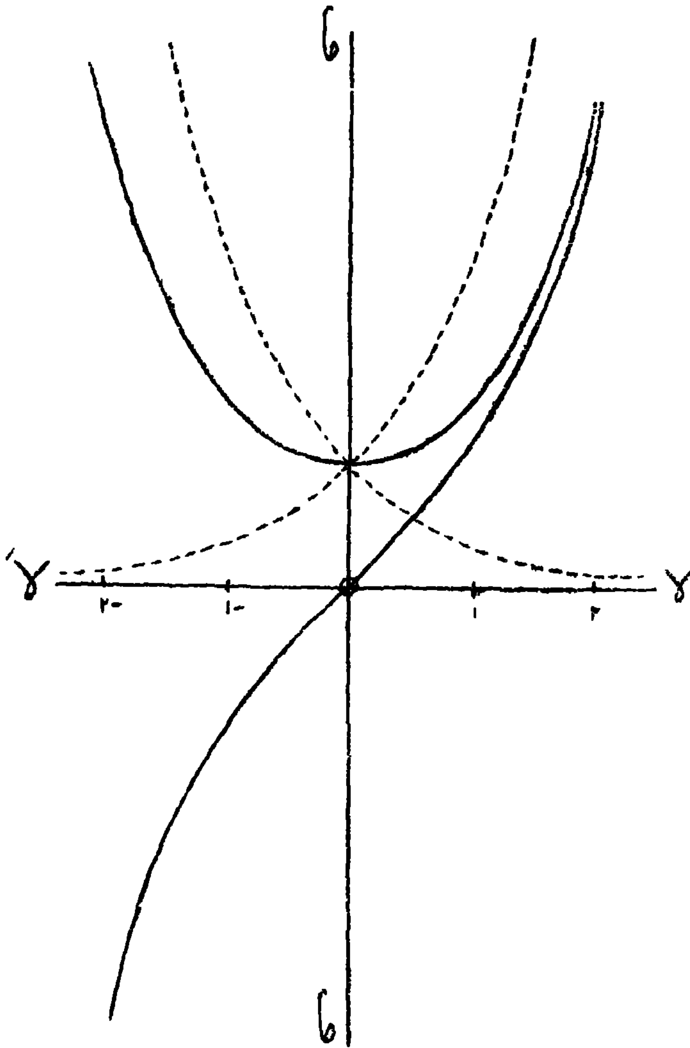
۸۰　شکل ۱۵(۲) میں منحنی ما = قو^لا اور ما = قو^-لا نقطوں والے خطوط سے دکھائے گئے ہیں اور منحنی ما = جمز لا اور ما = جبز لا جو اوپر کے منحنیوں کے معینوں کے بالترتیب نصف مجموعہ اور نصف فرق لینے سے حاصل ہوتے ہیں مسلسل خط میں دکھائے گئے ہیں*۔

---

* چند باتوں میں ان تفاعلوں کو قائم زائد کے ساتھ وہی رشتہ ہے جو مستدیر تفاعلوں کو دائرہ کے ساتھ ہے۔ دیکھو دفعہ ۱۰۰ مثال ۲۔

† یہ تفاعل ذرا مختلف طریق کتابت میں دفعہ ۳۹ میں موجود رہ چکے ہیں۔

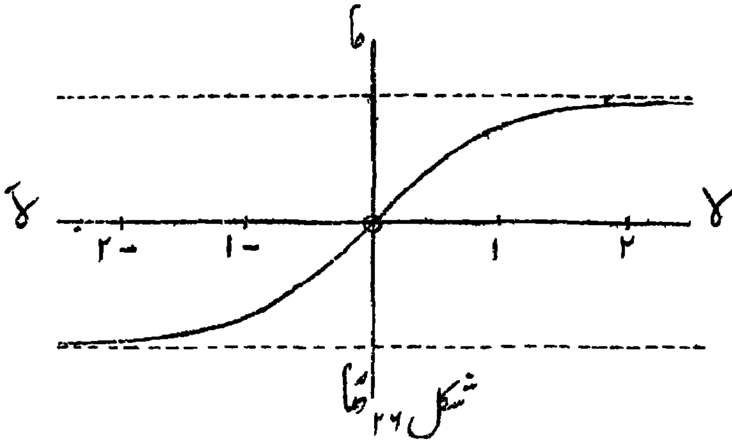
* منحنی ما = جمز لا کو علم سکونیات میں زنجیرہ سے موسوم کیا جاتا ہے کیونکہ یکساں کثافت والی زنجیر جو قوت جاذبہ کے زیر عمل آزادانہ لٹک رہی ہو یہ شکل اختیار کرتی ہے۔



شکل ۲۵

۸ چونکہ تفاعل جبز لا اور جمز لا مسلسل ہیں اور جمز لا کبھی صفر نہیں ہوتا اس لئے ثابت ہوا کہ مسز لا متغیر لا کی تمام قیمتوں کے لئے مسلسل ہے شکل ۲۶ میں منحنی ما = مسز لا کی ترسیم دکھائی گئی ہے خطوط ما = ±۱ اِسکے

متقارب ہیں۔[*]



شکل ۲۶

چونکہ جمز لا + جبز لا = قو$^{\text{لا}}$ اور جمز لا − جبز لا = قو$^{-\text{لا}}$ ...... (۳)

اس لئے ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے کہ

جمز^{2} لا − جبز^{2} لا = ۱ .... (۴)

نیز اسکو بالترتیب جمز^{2} لا اور جبز^{2} لا سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

قطز^{2} لا = ۱ − مسز^{2} لا
قمز^{2} لا = ممز^{2} لا − ۱
.... (۵)

نیز جمز (لا + ما) = $\frac{1}{2}$ (قو$^{\text{لا}}$ × قو$^{\text{ما}}$ + قو$^{-\text{لا}}$ × قو$^{-\text{ما}}$)

= $\frac{1}{2}$ {(جمز لا + جبز لا) (جمز ما + جبز ما) + (جمز لا − جبز لا) (جمز ما − جبز ما)}

= جمز لا جمز ما + جبز لا جبز ما .... (۶)

[*] تفاعیل جمز لا، جبز لا اور مسز لا کی قیمتیں اعشاریہ کے تین مقام تک لا کی قیمتوں صفر سے ۵ء۲ تک کے لئے وقفوں ۱ء۰ پر ضمیمہ کے جدول ع میں دی ہوئی ہیں۔

اور اسی طرح

جبز (لا + ما) = جبز لا جمز ما + جمز لا جبز ما . . . . . (۷)

اور بالخصوص جمز ۲لا = جمز^۲ لا + جبز^۲ لا ، جبز ۲لا = ۲ جبز لا جمز لا . . . . (۸)

نتیجہ (۴) اور (۵) ذیل کے مثلثی نتائج کے مقابلہ میں ہیں

جب^۲ لا + جم^۲ لا = ۱ . . . . (۹)

قط^۲ لا = ۱ + مس^۲ لا
قم^۲ لا = ۱ + ظم^۲ لا } . . . . (۱۰)

اور اسی طرح نتیجہ (۸) ذیل کے نتیجوں کے مشابہ ہے

جم ۲لا = جم^۲ لا − جب^۲ لا ، جب ۲لا = ۲ جب لا جم لا . . . . . . (۱۱)

۴۱ — زائدی تفاعلوں کا تفرق —

(۱) اگر ما = جبز لا . . . . (۱)

$$\text{تو}\quad \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{عف}\left(\frac{\text{قو}^{\text{لا}} - \text{قو}^{-\text{لا}}}{۲}\right) = \frac{۱}{۲}\left(\text{عف قو}^{\text{لا}} - \text{عف قو}^{-\text{لا}}\right)$$

$$= \frac{۱}{۲}\left(\text{قو}^{\text{لا}} + \text{قو}^{-\text{لا}}\right) = \text{جمز لا} \quad . . . . . (۲)$$

اسی طرح اگر ما = جمز لا . . . . (۳)

$$\text{تو}\quad \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{جبز لا} \quad . . . . (۴)$$

(۲) اگر ما = مسز لا . . . . (۵)

$$\text{تو}\quad \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{عف}\left(\frac{\text{جبز لا}}{\text{جمز لا}}\right) = \frac{\text{جمز لا} \times \text{عف جبز لا} - \text{جبز لا} \times \text{عف جمز لا}}{\text{جمز}^۲\ \text{لا}}$$

$$= \frac{\text{جمز}^۲\ \text{لا} - \text{جبز}^۲\ \text{لا}}{\text{جمز}^۲\ \text{لا}} = \text{قطز}^۲\ \text{لا} \quad . . . . . (۶)$$

دفعہ ۴۰ (۴) کی مدد سے۔

اسی طرح اگر ما = ممز لا . . . . (۷)

تو $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = -\text{قمز}^{2}\ \text{لا}$ .... (۸)

(۳) اگر ما = قطمز لا .... (۹)

تو دفعہ ۳۱ (۴) کی مدد سے

$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{عف}\left(\frac{1}{\text{جمز لا}}\right) = -\frac{\text{عف جمز لا}}{\text{جمز}^{2}\ \text{لا}} = -\frac{\text{جمز لا}}{\text{جمز}^{2}\ \text{لا}}$ .... (۱۰)

۹۳

اسی طرح اگر ما = تمز لا .... (۱۱)

تو $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = -\frac{\text{جمز لا}}{\text{جمز}^{2}\ \text{لا}}$ .... (۱۲)

۴۲ — لوکارتمی تفاعل —

قوت نما تفاعل کے مقلوب تفاعل کو لوکارتمی تفاعل کہتے ہیں۔

اب اگر لا = $\text{ق}^{\text{ما}}$

تو ما = لوک لا .... (۱)

دفعہ ۳۸ میں ہم نے دیکھا تھا کہ جیسے ما، − ∞ سے صفر میں سے ہوتا ہوا + ∞ تک بڑھتا ہے تو $\text{ق}^{\text{ما}}$ بھی مسلسل طور پر صفر سے ایک میں سے ہوتا ہوا + ∞ تک بڑھتا ہے۔ پس لا کی ہر ایک مثبت قیمت کے لئے لوک لا کی صرف ایک ہی قیمت ہے۔ نیز یہ قیمت مثبت یا منفی ہوگی بموجب اسکے کہ لا > یا < ۱۔ نیز جبکہ لا = ۰ تو ما = − ∞ اور لا = + ∞ کے لئے ما = + ∞، لا کی منفی قیمتوں کے لئے لوکارتمی تفاعل وجود نہیں رکھتا۔

لوکارتمی تفاعل کے عام خواص اس تعریف سے حسب معمول طریقوں سے حاصل ہو سکتے ہیں۔ شکل ۲۷ میں مسلسل خط سے لوک لا کی ترسیم دکھائی گئی ہے ظاہر ہے کہ یہ ترسیم شکل میں وہی ہے جو $\text{ق}^{\text{لا}}$ کی ہے [دیکھو شکل ۲۴ صفحہ ۱۱۰] صرف لا اور ما آپس میں بدل دئے گئے ہیں۔*

---

* تفاعل لوک لا کی قیمتیں ضمیمہ کی جدول ف میں دی گئی ہیں۔

اب ہم اُلا کی تعریف کر سکتے ہیں جبکہ ا مثبت مقدار ہے اور لا غیر منطق ہے۔

چونکہ ا = قو لوک ا

اس لئے اگر لا ناطق ہو تو اُلا = قو لا لوک ا .... (۲)

اور غیر منطق لا کے لئے اس نتیجہ کو اُلا کی تعریف قرار دینگے۔†

پس اگر یا = اُلا .... (۳)

تو [illegible] = اُلا لوک ا .... (۴)

مذکورۂ بالا تعریف والے لا کے لوکارتم کو لوک قو لا سے ظاہر کرینگے تاکہ اسکو عام یا بریگ کے لوکارتم لوک ۱۰ لا سے تمیز کیا جا سکے۔ آخر الذکر لوکارتم کی تعریف ذیل کے بیان سے کی جاتی ہے۔

یا = لوک ۱۰ لا اگر ۱۰ یا = لا یا قو یا لوک قو ۱۰ = لا .... (۵)

پس یا لوک قو ۱۰ = لوک قو لا یعنی لوک ۱۰ لا = مم لوک قو لا .... (۶)

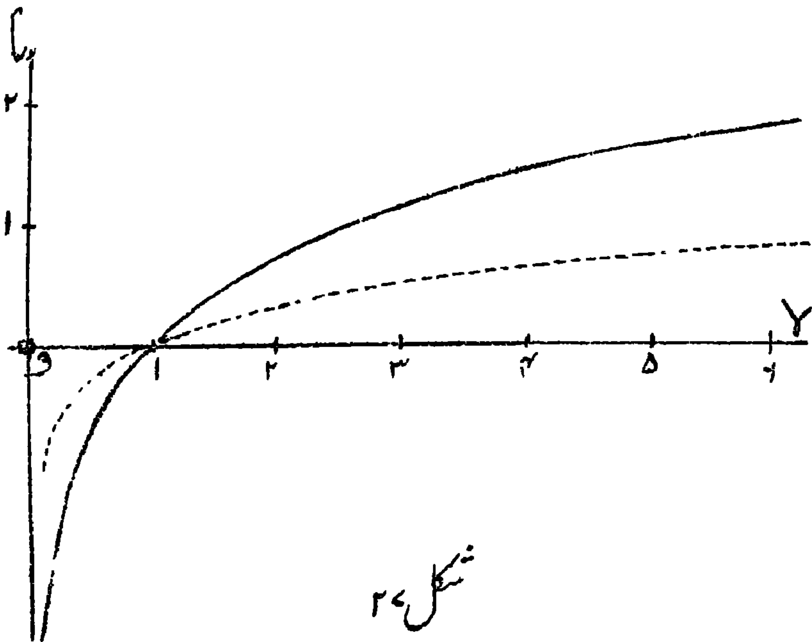
جہاں مم = ۱ / لوک قو ۱۰ = ۰.۴۳۴۲۹ .... (۷)

مم کی قیمت نکالنے کا طریقہ چودھویں باب میں بتایا جائیگا۔

پس تفاعل یا = لا کی ترسیم لوک قو لا کی ترسیم کے عمودی [illegible] کو ایک مستقل نسبت مم میں کم کرنے سے حاصل ہوتی ہے [illegible]

---

† اُلا کی زیادہ عام جبری تعریف یہ ہے کہ اگر لا۱، لا۲، لا۳ .... ناطق مقداروں کا ایک سلسلہ ہے جس کی انتہا غیر منطق مقدار لا ہو تو اسلسلہ اُلا۱، اُلا۲، اُلا۳ .... کی انتہا ہے۔ اب یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ انتہا موجود ہے اور لا کا مسلسل تفاعل ہے۔



شکل ۲۷

اس کتاب میں علامت لوک لا ہمیشہ لوکِ و لا کو تعبیر کرے گی۔

۴۳۔ چند انتہائی قیمتیں۔

قوت نما اور لوکارتمی تفاعلوں سے متعلق چند انتہائی قیمتیں خاص اہمیت رکھتی ہیں۔

(ا) $\underset{لا \to \infty}{\text{نہا}}$ لا قو$^{-لا}$ .... (۱)

کو محسوب کرو۔

یہ تفاعل غیر معین شکل $\infty \times 0$ اختیار کرتا ہے۔ اب چونکہ

$$\frac{لا}{قو^{لا}} = \frac{1}{\frac{1}{لا} + 1 + \frac{لا}{\lfloor 2} + \frac{لا^2}{\lfloor 3} + \cdots\cdots}$$

اس لیے ظاہر ہے کہ دریافت طلب انتہا صفر ہے۔
اسی طرح ثابت کیا جا سکتا ہے کہ م کی تمام ناطق قیمتوں کے لئے

$$\text{نہا}_{\text{لا}\to\infty} \text{لا}^{\text{م}}\, \text{قو}^{-\text{لا}} = ۰ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

اس سے حاصل ہوا کہ جیسے لا، لا انتہا بڑھتا ہے $\text{قو}^{\text{لا}}$ بمقابلہ لا کی بڑی سے بڑی قوت کے، لا انتہا ہو جاتا ہے۔ نیز اگر ر ایک سے کم مثبت مقدار ہو تو

$$\text{نہا}_{\text{ن}\to\infty} \text{ن}\, \text{ر}^{\text{ن}} = ۰ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

اس کے ثبوت کے لئے فرض کرو کہ

$$\text{ک} = \text{لوک}\left(\frac{1}{\text{ر}}\right)$$

اب چونکہ ک مثبت ہے

$$\text{ن}\, \text{ر}^{\text{ن}} = \text{ن}\, \text{قو}^{-\text{ک}\,\text{ن}}$$

(۲) اب اگر نتیجہ (۱) میں ہم رکھیں $\text{ی} = \text{قو}^{\text{لا}}$ یعنی لا = لوک ی تو حاصل ہوتا ہے

$$\text{نہا}_{\text{ی}\to\infty} \frac{\text{لوک ی}}{\text{ی}} = ۰ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴)$$

پس جیسے لا بے انتہا بڑا ہوتا ہے ویسے لوک لا بھی لا انتہا بڑھتا ہے لیکن لا کے مقابلہ میں لا انتہا چھوٹا رہتا ہے۔

(۳) نیز اگر نتیجہ (۱) میں $\text{ی} = \text{قو}^{-\text{لا}}$ یعنی لا = ـ لوک ی رکھیں تو حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{نہا}_{\text{ی}\to ۰} \text{ی}\, \text{لوک ی} = ۰ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (۵)$$

(۴) اب

$$\frac{\text{قو}^{\text{لا}} - ۱}{\text{لا}} = ۱ + \frac{\text{لا}}{۲!} + \frac{\text{لا}^{۲}}{۳!} + \ldots\ldots\ldots$$

$$= ۱ + \frac{۱}{۲}\,\text{لا}\left(۱ + \frac{\text{لا}}{۳} + \frac{\text{لا}^{۲}}{۴\times۳} + \ldots\ldots\right)$$

خطوط وحدانی کے اندر کا سلسلہ مستدق ہے اور اسلئے اس کا حاصل جمع محدود ہے

پس $\underset{\text{لا}\leftarrow\text{۰}}{\text{نہا}} \frac{\text{قو}^{\text{لا}} - \text{۱}}{\text{لا}} = \text{۱}$، .... (۶)

اور اگر لا کی بجائے ک لا لکھیں تو

$\underset{\text{لا}\leftarrow\text{۰}}{\text{نہا}} \frac{\text{قو}^{\text{ک لا}} - \text{۱}}{\text{لا}} = \text{ک}$، .... (۷)

اور اس میں ک = لوک ا درج کرنے سے جہاں ا مثبت مقدار ہے حاصل ہوتا ہے

$\underset{\text{لا}\leftarrow\text{۰}}{\text{نہا}} \frac{\text{ا}^{\text{لا}} - \text{۱}}{\text{لا}} = \text{لوک ا}$، .... (۸)

نیز لا = $\frac{\text{۱}}{\text{ن}}$ درج کرنے سے اس نتیجہ کی دوسری شکل حاصل ہوتی ہے

$\underset{\text{ن}\leftarrow\infty}{\text{نہا}}\ \text{ن}\left(\text{ا}^{\frac{\text{۱}}{\text{ن}}} - \text{۱}\right) = \text{لوک ا}$، .... (۹)

۸۶

(۵) اگر (۶) میں لا = لوک (۱+ی) یعنی قو^لا = ۱+ی لکھیں تو حاصل ہوتا ہے

$\underset{\text{ی}\leftarrow\text{۰}}{\text{نہا}} \frac{\text{لوک}(\text{۱}+\text{ی})}{\text{ی}} = \text{۱}$، .... (۱۰)

(۶) اگر $\text{ع} = \left(\text{۱} + \frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}$، .... (۱۱)

تو $\text{لوک ع} = \text{ن لوک}\left(\text{۱} + \frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)$

اور اس میں لا = ن ی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$\underset{\text{ن}\leftarrow\infty}{\text{نہا}}\ \text{لوک ع} = \text{لا} \times \underset{\text{ی}\leftarrow\text{۰}}{\text{نہا}} \frac{\text{لوک}(\text{۱}+\text{ی})}{\text{ی}}$ [نتیجہ (۱۰) کی رو سے]

$= \text{لا}$۔ .... (۱۲)

پس $\underset{\text{ن}\leftarrow\infty}{\text{نہا}} \left(\text{۱} + \frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} = \text{قو}^{\text{لا}}$۔ .... (۱۳)

بعض اوقات جبر و مقابلہ میں دائیں جانب کی انتہا سے قوت نما تفاعل کی تعریف کرتے ہیں۔

۴۴ — لوکارثم کا تفرق

(۱) اگر $\text{ما} = \text{لوک}\ \text{لا}$ ....(۱)

تو $\text{لا} = \text{ثو}^{\text{ما}}$ اور $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = \text{ثو}^{\text{ما}} = \text{لا}$

اور اس لئے $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{\text{لا}}$ ....(۲)

اور یہ گھٹتا ہے جیسے لا بڑھتا ہے اس لئے اس کے منحنی کے مماس کا میلان محور لا سے کم ہوتا جاتا ہے۔ شکل ۲۷ صفحہ (۱۱۹) دیکھو۔

(۲) اگر $\text{ما} = \text{لوک}_{\text{ا}}\ \text{لا}$ ....(۳)

تو $\text{لا} = \text{ا}^{\text{ما}}$ ، $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = \text{ا}^{\text{ما}} \times \text{لوک}_{\text{ث}}\ \text{ا} = \text{لا}\ \text{لوک}_{\text{ث}}\ \text{ا}$

اسلئے $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{\text{لوک}_{\text{ث}}\ \text{ا}} \times \frac{1}{\text{لا}}$ ....(۴)

مثلاً اگر $\text{ما} = \text{لوک}_{10}\ \text{لا}$ ....(۵)

تو $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{مما}}{\text{لا}}$ ....(۶)

جہاں دفعہ ۲۸ کے مطابق $\text{مما} = 0.43429$

(۳) اگر $\text{ما} = \text{لوک}\ \text{ع}$ ....(۷)

جہاں ع متغیر لا کا معلوم تفاعل ہے تو دفعہ ۳۲ کے مطابق

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرع}} \times \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{\text{ع}}\ \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} \quad \text{..........(۸)}$$

مثال ۱ — اگر $\text{ما} = \text{لوک}\ (\text{جب}\ \text{لا})$ ....(۹)

تو $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{۱}{\text{جب لا}} \times \text{عف(جب لا)} = \text{مم لا}$ ....(۱۰)

اسی طرح اگر $\text{ما} = \text{لوک قط لا} = -\text{لوک جم لا}$ ....(۱۱)

تو $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{مس لا}$ ....(۱۲)

مثال ۲ — اگر $\text{ما} = \text{لوک}\left(\text{مس}\ \frac{۱}{۲}\text{لا}\right)$ ....(۱۳)

تو $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{۱}{\text{مس}\ \frac{\text{لا}}{۲}}\ \text{عف}\left(\text{مس}\ \frac{\text{لا}}{۲}\right) = \frac{۱}{\text{مس}\ \frac{\text{لا}}{۲}} \times \text{قط}^{۲}\ \frac{\text{لا}}{۲} \times \frac{۱}{۲}$

$= \frac{۱}{\text{جب لا}}$ ......(۱۴)

اسی طرح اگر $\text{ما} = \text{لوک مس}\left(\frac{\pi}{۴} + \frac{\text{لا}}{۲}\right)$ ....(۱۵)

تو ہمیں حاصل ہوگا $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{۱}{\text{جم لا}}$ ....(۱۶)

مثال ۳ — اگر $\text{ما} = \frac{۱}{۲}\ \text{لوک}\left(\frac{۱+\text{لا}}{۱-\text{لا}}\right)$

$= \frac{۱}{۲}\ \text{لوک}(۱+\text{لا}) - \frac{۱}{۲}\ \text{لوک}(۱-\text{لا})$ ......(۱۷)

تو $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۱+\text{لا}} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۱-\text{لا}} = \frac{۱}{۱-\text{لا}^{۲}}$ ....(۱۸)

مثال ۴ — فرض کرو کہ $\text{ما} = \text{لوک}\left\{\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^{۲} \pm ۱}\right\}$ ......(۱۹)

تو $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{۱}{\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^{۲} \pm ۱}} \times \text{عف}\left\{\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^{۲} \pm ۱}\right\}$

$= \frac{۱}{\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^{۲} \pm ۱}} \times \left\{۱ + \frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{لا}^{۲} \pm ۱}}\right\}$

$= \frac{۱}{\sqrt{\text{لا}^{۲} \pm ۱}}$ ....(۲۰)

۴۵ ـ لوکارثمی تفرق

زیادہ اجزاءِ ضربی والے تفاعل کو تفرق کرنے سے پہلے تفاعل کا لوکارثم لے لینے سے اکثر دفعہ سہولت ہو جاتی ہے۔

پس اگر $ما = \frac{ع_۱ ع_۲ ع_۳ \dots}{و_۱ و_۲ و_۳ \dots}$ .... (۱)

تو لوک ما = لوک $ع_۱$ + لوک $ع_۲$ + لوک $ع_۳$ ... ـ لوک $و_۱$ ـ لوک $و_۲$ ـ لوک $و_۳$ ... (۲)

اور اس لئے بموجب دفعہ ۴۳ (۳)

$$\frac{۱}{ما}\frac{فرما}{فرلا} = \frac{۱}{ع_۱}\frac{فرع_۱}{فرلا} + \frac{۱}{ع_۲}\frac{فرع_۲}{فرلا} + \frac{۱}{ع_۳}\frac{فرع_۳}{فرلا} + \dots$$

$$- \frac{۱}{و_۱}\frac{فرو_۱}{فرلا} - \frac{۱}{و_۲}\frac{فرو_۲}{فرلا} - \frac{۱}{و_۳}\frac{فرو_۳}{فرلا} \dots \quad (۳)$$

دفعہ ۳۰ اور ۳۱ کے نتیجوں کی یہ عام شکل ہے

یہی طریقہ $ما = ع^و$ .... (۴)

کے تفرق کرنے میں استعمال کیا جا سکتا ہے۔

اب لوک ما = و لوک ع .... (۵)

اس لئے $\frac{۱}{ما}\frac{فرما}{فرلا} = \frac{فرو}{فرلا} \times لوک\ ع + \frac{و}{ع}\frac{فرع}{فرلا}$ .... (۶)

پس $\frac{فرما}{فرلا} = ع^و \frac{فرو}{فرلا} لوک\ ع + و ع^{و-۱} \frac{فرع}{فرلا}$ .... (۷)

یعنی تفاعل ع اور و کو باری باری مستقل مانکر تفرق کریں اور نتیجوں کو جمع کر لیں۔

مثال ۱ـ اگر $ما = \sqrt{\frac{(ا+لا)(ب+لا)}{(ا-لا)(ب-لا)}}$

تو لوک ما = $\frac{۱}{۲}$ لوک (ا + لا) + $\frac{۱}{۲}$ لوک (ب + لا) ـ $\frac{۱}{۲}$ لوک (ا ـ لا) ـ $\frac{۱}{۲}$ لوک (ب ـ لا)

پس $\frac{1}{\text{ما}}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{2}\left\{ \frac{1}{\text{ا}+\text{لا}} + \frac{1}{\text{ب}+\text{لا}} + \frac{1}{\text{ا}-\text{لا}} + \frac{1}{\text{ب}-\text{لا}} \right\}$

$$= \frac{\text{ا}}{\text{ا}^2-\text{لا}^2} + \frac{\text{ب}}{\text{ب}^2-\text{لا}^2} = \frac{(\text{ا}+\text{ب})(\text{اب}-\text{لا}^2)}{(\text{ا}^2-\text{لا}^2)(\text{ب}^2-\text{لا}^2)}$$

اسلئے $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{(\text{ا}+\text{ب})(\text{اب}-\text{لا}^2)}{(\text{ا}-\text{لا})^{\frac{3}{2}}(\text{ب}-\text{لا})^{\frac{3}{2}}(\text{ا}+\text{لا})^{\frac{1}{2}}(\text{ب}+\text{لا})^{\frac{1}{2}}}$

مثال ۲۔ اگر $\text{ما} = \text{لا}^{\text{لا}}$

تو $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{لا}^{\text{لا}}(1 + \text{لوک لا})$

۴۶۔ مقلوب زائدی تفاعل۔ مقلوب زائدی تفاعل $\text{جبز}^{-1}\text{لا}$، $\text{جمز}^{-1}\text{لا}$، $\text{مسز}^{-1}\text{لا}$ وغیرہ وغیرہ کی تعریف اسی اصول پر کیجائیگی ۸۹ جو دفعہ ۱۶ میں بتایا گیا ہے۔

یعنی $\text{ما} = \text{جبز}^{-1}\text{لا}$ کے معنی یہ ہیں کہ $\text{لا} = \text{جبز ما}$ ...... (۱)

اور اسی طرح باقی مقلوب تفاعلوں کے لئے۔

یہ تمام تفاعل لوکارثمی تفاعلوں کے رقوم میں بیان ہو سکتے ہیں۔

پس اگر $\text{لا} = \text{جبز ما} = \frac{1}{2}(\text{ق}^{\text{ما}} - \text{ق}^{-\text{ما}})$ .... (۲)

تو $\text{ق}^{2\text{ما}} - 2\text{لا}\,\text{ق}^{\text{ما}} - 1 = 0$ .... (۳)

$\text{ق}^{\text{ما}}$ میں دوسرے درجے کی مساوات کو حل کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$\text{ق}^{\text{ما}} = \text{لا} \pm \sqrt{\text{لا}^2 + 1}$ .... (۴)

اگر ما حقیقی ہے تو $\text{ق}^{\text{ما}}$ کو مثبت ہونا چاہئے اور اسلئے اوپر کی علامت لینی چاہئے

پس $\text{جبز}^{-1}\text{لا} = \text{لوک}\left\{\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^2+1}\right\}$ .... (۵)

اسی طرح اگر لا > ۱ تو ہم حاصل کر سکتے ہیں کہ

$$\text{جمز}^{-1}\text{لا} = \text{لوگ}\left\{\text{لا} \pm \sqrt{\text{لا}^{2}-1}\right\} \quad \ldots\ldots (۶)$$

اس میں دونوں علامتیں ممکن ہیں۔ مقداریں $\text{لا} \pm \sqrt{\text{لا}^{2}-1}$ ایک دوسرے کی معکوس ہیں اور انکا لوگارثم صرف علامت میں مختلف ہے۔ $\text{جمز}^{-1}\text{لا}$ کی ترسیم کھینچنے پر ظاہر ہوگا کہ ایک سے بڑی لا کی ہر قیمت کے لئے ما کی دو قیمتیں ہیں جو مقدار میں مساوی ہیں اور علامت میں مختلف ہیں۔

اب اگر

$$\text{لا} = \text{مسز ما} = \frac{\text{قو}^{\text{ما}} - \text{قو}^{-\text{ما}}}{\text{قو}^{\text{ما}} + \text{قو}^{-\text{ما}}} \quad \ldots\ldots (۷)$$

تو

$$\text{قو}^{2\text{ما}} = \frac{1+\text{لا}}{1-\text{لا}} \quad \ldots\ldots (۸)$$

پس

$$\text{مسز}^{-1}\text{لا} = \frac{1}{2}\,\text{لوگ}\,\frac{1+\text{لا}}{1-\text{لا}} \quad \ldots\ldots (۹)$$

یہ حقیقی ہے صرف جبکہ $|\text{لا}| < 1$ ہے۔

اسی طرح

$$\text{ممز}^{-1}\text{لا} = \frac{1}{2}\,\text{لوگ}\,\frac{\text{لا}+1}{\text{لا}-1}$$

اور یہ حقیقی ہے صرف جبکہ $|\text{لا}| > 1$ ہے۔

۴۷ ۔ مقلوب زائدی تفاعلوں کا تفرق۔

(آ) اگر

$$\text{ما} = \text{جمز}^{-1}\text{لا} \quad \ldots\ldots (۱)$$

تو $\text{لا} = \text{جمز ما}$ اور $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}} = \text{جمم ما} = \sqrt{\text{لا}^{2}+1}$

اس لئے

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{1}{\sqrt{\text{لا}^{2}+1}} \quad \ldots\ldots (۲)$$

اس میں کوئی مشتبہ علامت نہیں ہے کیونکہ جمم ما خاصیت سے مثبت ہے۔

۹۰

(۲) اگر $\quad$ ما = جمن$^{-1}$ لا ....(۳)

تو $\quad$ لا = جمن ما $\quad$ اور $\quad \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}}$ = جتر ما = ± $\sqrt{\text{لا}^2 - 1}$

پس $\quad \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \pm \frac{1}{\sqrt{\text{لا}^2 - 1}}$ ....(۴)

ایک سے بڑی لا کی کسی مقررہ قیمت کے لئے ما کی دو قیمتیں ہیں اور ان کے لئے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کی علامتیں مختلف ہیں (لا اور ما کو بدل کر صفحہ (۱۱۴) پر شکل ۲۵ دیکھو)

(۳) $\quad$ اگر $\quad$ ما = مسن$^{-1}$ لا ....(۵)

تو لا = مسن ما اور $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}}$ = قطن^2 ما = ۱ − لا^2

اور اس لئے $\quad \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{1}{1 - \text{لا}^2}$ ....(۶)

یہ نتیجہ دفعہ ۴۴ مثال ۳ کے موافق ہے۔ یہ بات قابل توجہ ہے کہ ما صرف اسی وقت حقیقی ہے جبکہ لا^2 > ۱ (شکل ۲۶ صفحہ (۱۱۵) پر دیکھو)

اسی طرح اگر $\quad$ ما = قمن$^{-1}$ لا ....(۷)

تو $\quad \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = - \frac{1}{\text{لا}^2 - 1}$ ....(۸)

اگر ما حقیقی ہو تو یہ ضروری ہے کہ لا^2 ایک سے بڑا ہو۔

امثلہ ۱۱

۱۔ $\quad$ وٰ کے سلسلے کو جمع کرکے ثابت کرو کہ

$\frac{1}{\text{و}}$ = ۲۹ ۳۶۷۸۷۹، جمن ۱ = ۱۷۵۲۰۱۱۹ ۲۳، جبن ۱ = ۱۷۵۲۰۱۱۹

۲- ثابت کرو کہ √ق = ۱٫۶۴۸۷۲۱۳، 1/√ق = ۰٫۶۰۶۵۳۰۷، جمز ½ = ۱٫۱۲۷۶۲۶۰،

جبز ½ = ۰٫۵۲۱۰۹۵۳۔

۳- اگر |ا| < |ب| تو ثابت کرو کہ مساوات ا جمز لا + ب جبز لا = ۰ کی صرف ایک ہی اصل حقیقی ہے۔

۴- قمز لا، ممز لا، ممز لا − مسز لا کی ترسیمیں کھینچو۔

۵- ثابت کرو کہ تفاعل مسز (1/لا) نقطہ لا = ۰ پر غیر مسلسل ہے۔ نیز اس تفاعل کی ترسیم کھینچو۔

۶- اگر ا اور ب مثبت ہوں اور ا > ب تو ثابت کرو کہ تفاعل (ا ق^لا + ب ق^−لا) / (ق^لا + ق^−لا) کی اوپری حد ا ہے اور نیچے کی حد ب ہے۔

ذیل کے ضابطوں کو ثابت کرو۔

۷- جمز ۲لا = ۲ جمز² لا − ۱ = ۱ + ۲ جبز² لا

۸- جبز ۲لا = ۲ مسز لا / (۱ − مسز² لا)، جمز ۲لا = (۱ + مسز² لا) / (۱ − مسز² لا)، مسز ۲لا = ۲ مسز لا / (۱ + مسز² لا)

۹- جمز² لا جم² لا + جبز² لا جب² لا = ½ (جمز ۲لا + جم ۲لا)

اور جمز² لا جب² لا + جبز² لا جم² لا = ½ (جمز ۲لا − جم ۲لا)

۱۰- جمز² لا × جم² لا − جبز² لا جب² لا = ½ (۱ + جمز ۲لا جم ۲لا)

جمز² لا جب² لا − جبز² لا جم² لا = ½ (۱ − جمز ۲لا جم ۲لا)

۱۱- جمز² ع + جبز² و = جبز² ع + جمز² و = جمز (ع + و) جمز (ع − و)

جمز² ع − جمز² و = جبز² ع − جبز² و = جبز (ع + و) جبز (ع − و)

۱۲- جبز ع + جبز و = ۲ جبز ½ (ع + و) جمز ½ (ع − و)

جبز ع − جبز و = ۲ جمز ½ (ع + و) جبز ½ (ع − و)

جمز ع + جمز و = ۲ جمز ½ (ع + و) جمز ½ (ع − و)

جمز ع − جمز و = ۲ جبز ½ (ع + و) جبز ½ (ع − و)

۱۳- $\text{سنہ}\ \tfrac{۱}{۲}\text{ع} = \dfrac{\text{جبز ع}}{\text{جمز ع}+۱} = \dfrac{\text{جمز ع}-۱}{\text{جبز ع}} = \sqrt{\dfrac{\text{جمز ع}-۱}{\text{جمز ع}+۱}}$

۱۴- $\text{جبز ۳ع} = ۴\ \text{جبز}^{۳}\text{ع} + ۳\ \text{جبز ع}$

$\text{جمز ۳ع} = ۴\ \text{جمز}^{۳}\text{ع} - ۳\ \text{جمز ع}$

۱۵- $۱+۲\ \text{جمز ع}+۲\ \text{جمز ۲ع}+۲\ \text{جمز ۳ع}+\dots+۲\ \text{جمز ن ع} = \dfrac{\text{جبز}(\text{ن}+\tfrac{۱}{۲})\text{ع}}{\text{جبز}\ \tfrac{۱}{۲}\text{ع}}$

امثلہ ۱۲

ذیل کے تفرقات کی تصدیق کرو۔

(۱) $\text{ما} = \text{و}^{\text{لا}^{۲}}$ — $\text{عف ما} = ۲\text{لا}\ \text{و}^{\text{لا}^{۲}}$

(۲) $\text{ما} = \dfrac{\text{و}^{\text{لا}}}{\text{لا}}$ — $\text{عف ما} = \text{و}^{\text{لا}}\left(۲ - \dfrac{۱}{\text{لا}^{۲}}\right)$

(۳) $\text{ما} = \text{و}^{\text{جب لا}}$ — $\text{عف ما} = \text{جم لا}\ \text{و}^{\text{جب لا}}$

(۴) $\text{ما} = \text{و}^{\text{جب}^{۲}\text{لا}}$ — $\text{عف ما} = \text{جب ۲لا}\ \text{و}^{\text{جب}^{۲}\text{لا}}$

(۵) $\text{ما} = \text{و}^{\text{عہ لا}}\ \text{جب بہ لا}$ — $\text{عف ما} = \text{و}^{\text{عہ لا}}(\text{عہ جب بہ لا} + \text{بہ جم بہ لا})$

(۶) $\text{ما} = \text{و}^{\text{عہ لا}}\ \text{جم بہ لا}$ — $\text{عف ما} = \text{و}^{\text{عہ لا}}(\text{عہ جم بہ لا} - \text{بہ جب بہ لا})$

(۷) $\text{ما} = \text{لا}\ \text{و}^{\text{لا}}$ — $\text{عف ما} = (\text{لا}+۱)\ \text{و}^{\text{لا}}$

(۸) $\text{ما} = \text{لا}\ \text{و}^{-\text{لا}}$ — $\text{عف ما} = (۱-\text{لا})\ \text{و}^{-\text{لا}}$

(۹) $\text{ما} = \text{لا}^{۴}\ \text{و}^{\text{لا}}$ — $\text{عف ما} = (\text{لا}+۴)\ \text{لا}^{۳}\ \text{و}^{\text{لا}}$

(۱۰) $\text{ما} = \text{و}^{\text{لا}}\ \text{جب لا}$ — $\text{عف ما} = \text{و}^{\text{لا}}(\text{جب لا} + \text{جم لا})$

(۱۱) ما = فو^لا جم لا ، عف ما = فو^لا (جم لا − جب لا)

(۱۲) ما = (فو^لا − ۱) / (فو^لا + ۱) ، عف ما = ۲ فو^لا / (فو^لا + ۱)^۲

(۱۳) ما = جبز^۲ لا ، عف ما = جبز ۲ لا

(۱۴) ما = جمز^۲ لا ، عف ما = جبز ۲ لا

(۱۵) ما = مسز^۲ لا ، عف ما = ۲ جبز لا / جمز^۳ لا

(۱۶) ما = جبز لا + ⅓ جبز^۳ لا ، عف ما = جمز^۳ لا

(۱۷) ما = مسز لا − ⅓ مسز^۳ لا ، عف ما = قطز^۴ لا

(۱۸) ما = جمز لا جم لا + جبز لا جب لا ، عف ما = ۲ جبز لا جم لا

(۱۹) ما = جمز لا جب لا + جبز لا جم لا ، عف ما = ۲ جمز لا جم لا

(۲۰) ما = (جمز لا − جم لا) / (جبز لا + جب لا) ، عف ما = ۲ جب لا جبز لا / (جبز لا + جب لا)^۲

(۲۱) ما = مسز^-۱ (جبز عہ جب لا / (۱ + جمز عہ جم لا)) ، عف ما = جبز عہ / (۱ + جمز عہ جم لا)

امثلہ ۱۳

ذیل کے تفرقات کی تصدیق کرو۔

(۱) ما = لا لوک لا ، عف ما = ۱ + لوک لا

(۲) ما = لا^م لوک لا ، عف ما = لا^(م−۱) (۱ + م لوک لا)

(۳) ما = لوک جب لا ، عف ما = مم لا

(۴) ما = لوک جم لا ، عف ما = − مس لا

(۵) ما = لوک مس لا ، عف ما = ۲ قم ۲ لا

(۶) ما = لوک جبز لا ، عف ما = ممز لا

(۷) ما = لوک جمز لا ، عف ما = مسز لا

(۸) ما = لوک مستر لا عف ما = ۲ قمز ۲لا

(۹) ما = لوک (لا / (۱ + لا)) عف ما = ۱ / (لا (۱ + لا))

(۱۰) ما = لوک ((۱ − لا) / (۱ + لا)) عف ما = − ۲ / (۱ − لا^۲)

(۱۱) ما = لوک (لا / √(لا^۲ + ۱)) عف ما = ۱ / (لا (لا^۲ + ۱))

(۱۲) ما = لوک ((۱ − √لا) / (۱ − √لا)) عف ما = ۱ / ((۱ − لا) √لا)

(۱۳) ما = لوک {√(لا + ۱) + √(لا − ۱)} عف ما = ۱ / (۲ √(لا^۲ − ۱))

(۱۴) ما = لوک (لا / (√(لا^۲ + ۱) − لا)) عف ما = ۱/لا + ۱/√(لا^۲ + ۱)

(۱۵) ما = لوک (لا − ۱) − (۲لا − ۱) / (۲ (لا − ۱)^۲) عف ما = (لا^۲ + ۱) / (لا − ۱)^۳

(۱۶) ما = لوک ((۱ + لا + لا^۲) / (۱ − لا + لا^۲)) عف ما = ۲ (۱ − لا^۲) / (۱ + لا^۲ + لا^۴)

(۱۷) ما = √((۱ + لا^۲) / (۱ − لا^۲)) عف ما = ۲لا / ((۱ − لا^۲)^(۳/۲) √(۱ + لا^۲))

(۱۸) ما = (√(۱ + لا^۲) − لا) / (√(۱ + لا^۲) + لا) عف ما = −۲ / (√(۱ + لا^۲) {√(۱ + لا^۲) + لا}^۲)

(۱۹) ما = (√(۱ + لا) + √(۱ − لا)) / (√(۱ + لا) − √(۱ − لا)) عف ما = − ۱ / (لا^۲ √(۱ − لا^۲)) − ۱/لا^۲

(۲۰) $ما = \frac{\sqrt{1+لا^2}+\sqrt{1-لا^2}}{\sqrt{1+لا^2}-\sqrt{1-لا^2}}$ عف $ما = -\frac{2}{لا^3\sqrt{1-لا^4}} - \frac{2}{لا^3}$

(۲۱) $ما =$ لوک $\frac{\sqrt{لا^2+1}-1}{\sqrt{لا^2+1}+1}$ عف $ما = \frac{1}{لا\sqrt{لا^2+1}}$

امثلہ ۱۴

۱- لوک جب لا اور لوک جس لا کی ترسیم $لا = 0$ سے $لا = \pi$ تک کھینچو۔

۲- ثابت کرو کہ اگر ف (لا) متغیر لا کا منطق صحیح تفاعل ہو تو

$$\text{نہا}_{لا \to \infty} \frac{ف(لا)}{و^{لا}} = 0$$

۳- ثابت کرو کہ اگر ا مثبت ہو تو $\text{نہا}_{ن \to \infty} \sqrt[ن]{ا} = 1$

۴- ثابت کرو کہ $\text{نہا}_{لا \to 0} \frac{لا - \text{لوک}(1+لا)}{لا^2} = \frac{1}{2}$

۵- ذیل کے ضابطوں کو ثابت کرو۔

$جیز^{-1} لا = جمز^{-1} \sqrt{لا^2+1}$ ، $جمز^{-1} لا = جیز^{-1} \sqrt{لا^2-1}$

$قطز^{-1} لا =$ لوک $\frac{1+\sqrt{1+لا^2}}{لا}$ ، $قمز^{-1} لا =$ لوک $\frac{1+\sqrt{1-لا^2}}{لا}$

۶- ثابت کرو کہ $مسز^{-1} \frac{لا^2-1}{لا^2+1} =$ لوک لا

۷- ثابت کرو کہ مساوات $جمز^{-1} لا + جمز^{-1} ما = م$ زائد کو ظاہر کرتی ہے اور اسکے متقارب دریافت کرو۔ [ما = لا قوم ، ما = لا قوم]

ذیل کے تفرقات کی تصدیق کرو۔

۸۔ $\text{م} = \text{قطز}^{-1}\,\text{لا}$ $\qquad$ $\text{عف م} = -\dfrac{1}{\text{لا}\sqrt{\text{لا}^2 - 1}}$

۹۔ $\text{م} = \text{قمز}^{-1}\,\text{لا}$ $\qquad$ $\text{عف م} = -\dfrac{1}{\text{لا}\sqrt{1 + \text{لا}^2}}$

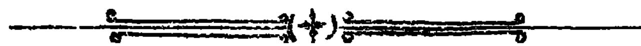
۱۰۔ $\text{م} = \text{جب}^{-1}(\text{مسز لا})$ $\qquad$ $\text{عف م} = \text{قطز لا}$

۱۱۔ $\text{م} = \text{س}^{-1}(\text{جبز لا})$ $\qquad$ $\text{عف م} = \text{قطز لا}$

۱۲۔ $\text{م} = \text{س}^{-1}(\text{مسز}\,\tfrac{1}{2}\text{لا})$ $\qquad$ $\text{عف م} = \tfrac{1}{2}\,\text{قطز لا}$

۱۳۔ $\text{م} = \text{مسز}^{-1}(\text{س}\,\tfrac{1}{2}\text{لا})$ $\qquad$ $\text{عف م} = \tfrac{1}{2}\,\text{قط لا}$

۱۴۔ $\text{م} = \text{مسز}^{-1}\,\dfrac{\text{لا} + \text{ل}}{1 + \text{ل لا}}$ $\qquad$ $\text{عف م} = \dfrac{1}{1 - \text{لا}^2}$



چوتھا باب

مشتق تفاعل کا استعمال

۴۸ - مشتق تفاعل کی علامت سے نتائج -

اگر ما = فہ (لا) اور اگر مف لا (δx)، مف ما (δy) متغیروں لا، ما کے ہمزاد یا ایک ساتھ کے اضافے ہوں تو $\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$ کی انتہا جبکہ مف لا کو لا انتہا کم کر دیا جائے تعریف کی رُو سے فہَ (لا) ہے، اس لئے انتہا سے قبل ہم لکھ سکتے ہیں

$$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \text{فہَ (لا)} + \text{ثہ}$$

جہاں ثہ بالآخر معدوم ہونے والی مقدار ہے -

جس طریق سے نسبت $\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$ اپنی انتہائی قیمت کے قریب آتی ہے اسکی توضیح کے لئے ایک عددی مثال دلچسپی سے خالی نہیں ہوگی لا = ۱ کے قریب میں ما = لوک۱۰ لا کی صورت کو لو- یہاں انتہائی قیمت ہے

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{صہ}}{\text{لا}} = \text{......۴۳۴۲۹ ،}$$

دوسرے کالم کے عدد مطبوعہ جدولوں سے لئے گئے ہیں

مف لا	مف ما	مف ما / مف لا
؍۱۰۰۰	؍۰۳۱۳۹۳	؍۳۱۳۹۳
؍۰۵۰۰	؍۰۲۱۱۸۹	؍۴۲۳۷۹
؍۰۱۰۰	؍۰۰۴۳۲۱۴	؍۴۳۲۱۴
؍۰۰۵۰	؍۰۰۲۱۶۶۱	؍۴۳۳۲۱
؍۰۰۱۰	؍۰۰۰۴۳۴۰۸	؍۴۳۴۰۸
؍۰۰۰۵	؍۰۰۰۲۱۷۰۹	؍۴۳۴۱۹
؍۰۰۰۱	؍۰۰۰۰۴۳۴۲۶	؍۴۳۴۲۶

پہلے فرض کرو کہ فہَ(لا) > ۰

چونکہ ثم کی انتہائی قیمت صفر ہے اس لئے مف لا کو کافی طور پر چھوٹا لینے سے اس امر کا یقین کر لیا جا سکتا ہے کہ

فہَ(لا) + ثم > ۰

یعنی (۱) کی رو سے مف ما کی وہی علامت ہوگی جو مف لا کی ہے مف لا کی تمام جائز قیمتوں کے لئے جو مطلق قیمت میں ایک خاص مقدار صہ سے کم ہیں۔

اسی طور پر اگر فہَ(لا) < ۰ تو مف ما کی علامت مف لا سے مختلف ہوگی مف لا کی ان تمام جائز قیمتوں کے لئے جو مطلق مقدار میں ایک خاص مقدار صہ سے کم ہیں۔

اگر متغیر متبوع کو ہندسی طور پر تعبیر کیا جائے جیسے شکل ۱ دفعہ ۱۳ میں کیا گیا اور اگر لا = و م جہاں م ایک نقطہ ہے بحث زیر بحث میں تو ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ فہَ(لا) کے مثبت ہونے کی صورت میں م کے دائیں یا جانب ایک وقفہ ہے جس کے ہر نقطہ پر تفاعل فہ(لا) کی قیمت م پر کی قیمت

بڑی ہے اور م کے بائیں جانب ایک وقفہ ہے جس کے ہر نقطہ پر تفاعل کی قیمت م پر کی قیمت سے چھوٹی ہے۔ اگر فہَ (لا) منفی ہو تو اس بیان میں الفاظ "چھوٹے" اور "بڑے" کو باہم بدل دینا چاہیئے۔ جب م، لا کے وقفہ کے شروع یا آخیر میں ہو تو یہ وقفے بالترتیب م کے دائیں اور بائیں جانب واقع ہونگے۔

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر فہَ (لا) کسی محدود وسعت میں مثبت ہو تو فہ (لا) کی قیمت لا کے ساتھ اس وقفہ میں استقلال کے ساتھ بڑھے گی یعنی اگر لا۱، لا۲ اس وقفہ میں لا کی کوئی ایسی قیمتیں ہوں کہ لا۲ > لا۱ تو

فہ (لا۲) > فہ (لا۱)

کیونکہ فہ (لا) مفروضات کے مطابق قابل تفرق ہے اور اس لئے مسلسل ہے پس وقفہ لا۱ سے لا۲ تک (بشمول طرفین) اس کی بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی قیمت ضرور ہونی چاہیئے۔ گذشتہ استدلال سے واضح ہے کہ بڑی سے بڑی قیمت نہ تو وقفہ کی ابتدا میں ہو سکتی ہے اور نہ درمیان میں، اس کو لازماً وقفہ کے آخیر پر واقع ہونا چاہیئے۔ اسی طرح فہ (لا) کی کم سے کم قیمت کو وقفہ کے شروع میں واقع ہونا چاہیئے۔

اسی طرح یہ ظاہر ہے کہ اگر فہَ (لا) کسی محدود وسعت میں منفی ہو تو فہ (لا) اس تمام وقفہ میں لا کے بڑھنے سے استقلال کے ساتھ گھٹتا ہے یعنی اگر اس وسعت میں لا کی کوئی دو قیمتیں لا۱، لا۲ ایسی ہوں کہ لا۲ > لا۱ تو

فہ (لا۲) < فہ (لا۱)

ان نتائج کا ہندسی مفہوم ظاہر ہے۔ جب ایک منحنی کا ڈھال مثبت ہو تو معین لا کے ساتھ بڑھتے ہیں جب ڈھال منفی ہو تو معین لا کے بڑھنے سے گھٹتے ہیں مختلف تفاعلوں کی ترسیم والے جو باب اول میں دی گئی ہیں مذکورہ بالا امور کی توضیح ہو گی۔

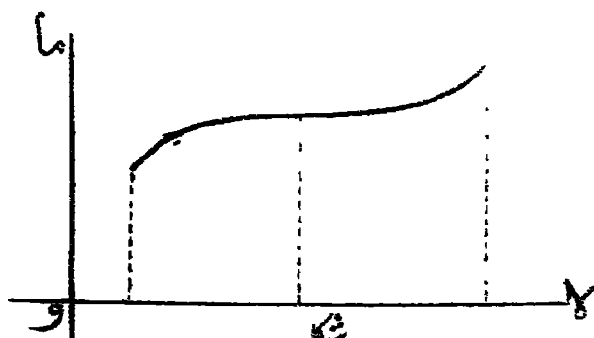
اس کے برعکس بیانات کہ اگر فہ (لا) کسی وسعت میں لا کے بڑھنے سے استقلال کے ساتھ بڑھتا ہو تو اس وسعت میں لا کی کسی قیمت کے لئے

فہَ(لا) منفی نہیں ہو سکتا اور اگر فہ(لا) لا کے بڑھنے سے استقلال کے ساتھ گھٹتا ہو تو فہَ(لا) مثبت نہیں ہو سکتا۔ یہ سب بیانات فہ(لا) کی تعریف سے فوراً مترشح ہوتے ہیں۔

نیز اگر فہَ(لا) [illegible] محدود تعداد [illegible] صفر بھی ہو بشرطیکہ باقی ہر جگہ مثبت ہو [illegible] فہ(لا) استقلال کے ساتھ بڑھے گا۔ مثلاً فرض کرو کہ فہَ(لا) [illegible] ہوا اسکے [illegible] صورت کے باقی وقفہ میں لا = لا۱ سے لا = لا۲ [illegible] فہَ(لا) مثبت ہے۔ فہ(لا) کی کم سے کم قیمت [illegible] ہو سکتی اور نہ ہی اوپر کے سرے لا = لا۲ پر [illegible] نیچے سرے لا = لا۱ پر واقع ہونا چاہئے۔ اسلئے

فہ(لا۲) > فہ(لا۱)

یہی نتیجہ حاصل ہوتا اگر فہَ(لا) مثبت ہو لا = لا۱ سے لا = لا۲ تک اور مؤخرالذکر قیمت کی صورت میں صفر ہوتا ہو



شکل (۲۸)

اسی طرح اگر فہَ(لا) ایک نقطوں کی محدود تعداد پر صفر ہوتا ہو لیکن باقی ہر جگہ منفی ہو تو فہ(لا) استقلال کے ساتھ گھٹتا ہے۔

مثال ۱ ۔　　ما = جم لا − (۱ − ½ لا²)

اس سے　　ذ ما / ذ لا = لا − جب لا

اور یہ لا کی مثبت قیمتوں کے لئے مثبت ہے۔ چونکہ ما ایک جفت تفاعل ہے اور لا = ۰ کے لئے معدوم ہوتا ہے اس سے نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$۱ > \text{جم لا} > ۱ - \frac{۱}{۲}\text{لا}^۲$$

نیز اگر

$$\text{ما} = \text{جب لا} - (\text{لا} - \frac{۱}{۶}\text{لا}^۳)$$

تو

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{جم لا} - (۱ - \frac{۱}{۲}\text{لا}^۲)$$

جس کا مثبت ہونا ثابت ہو چکا ہے۔ اس لئے چونکہ ما = ۰ جبکہ لا = ۰، پس

$$\text{لا} > \text{جب لا} > \text{لا} - \frac{\text{لا}^۳}{۶}$$ لا کی مثبت قیمتوں کے لئے۔

اگر لا منفی ہو تو ترتیب الٹ جانا چاہئے۔

مثال ۲ ۔ اگر $\text{ما} = \text{مس لا} - \text{لا}$

تو

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{قط}^۲\text{لا} - ۱ = \text{مس}^۲\text{لا}$$

پس $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ مثبت ہے سوائے لا = ۰، π، ۲π، ... کے لئے۔ اسلئے لا کے بڑھنے سے ما استقلال کے ساتھ ہر ایسی وسعت بھر میں بڑھتا ہے جسکے اندر نقاط عدم تسلسل (لا = $\frac{\pi}{۲}$، $\frac{۳\pi}{۲}$، ....) میں سے کوئی ایک بھی شامل نہیں ہوتا۔

پس بآسانی یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ۰ اور $\frac{\pi}{۲}$ کے درمیان

$$\text{مس لا} - \text{لا} = ۰$$

کی کوئی اصل نہیں اور اسکی ایک اور صرف ایک اصل ہے $\frac{\pi}{۲}$ اور $\frac{۳\pi}{۲}$ کے درمیان اور علیٰ ہذا القیاس۔

اس نتیجہ کی ترسیمی عمل سے تصدیق ہو سکتی ہے۔ اگر خطوط

$$\text{ما} = \text{مس لا}،\quad \text{ما} = \text{لا}$$

کی ترسیمیں بنائی جائیں تو انکے تقاطع سے لا کی وہ قیمتیں معلوم ہونگی جنکے لئے

جس لا = لا

۴۹۔ تفاعل کی دو مساوی قیمتوں کے درمیان کسی نقطہ میں مشتق صفر ہوتا ہے۔

اگر فہ (لا) صفر ہوتا ہو لا = ا اور لا = ب کے لئے اور ا، ب کے درمیان لا کی تمام قیمتوں کے لئے فہَ (لا) محدود ہو تو ا اور ب کے درمیان لا کی ایک نہ ایک قیمت کے لئے فہَ (لا) صفر ہوگا۔

کیونکہ یا تو فہ (لا) اس پوری وقفہ ا تا ب میں مستقل طور پر صفر ہوگا یا (دفعہ ۱۸ کی رو سے) اس وقفہ کے اندر لا کی کسی قیمت لا، کے لئے اسکی بڑی سے بڑی یا چھوٹی سے چھوٹی قیمت ہوگی۔ پہلی صورت میں فہَ (لا) = تمام وقفہ میں اور دوسری صورت میں فہَ (لا) نہ مثبت ہو سکتا ہے اور نہ منفی (دفعہ ۴۸)۔ اس لئے اسے لازماً صفر ہونا چاہئے کیونکہ مفروضہ کے مطابق یہ محدود ہے۔

اس مسئلہ کی ہندسی تعبیر یہ ہے کہ اگر کوئی منحنی محور لا سے دو نقطوں پر ملے اور منحنی کا ڈھال ہر جگہ محدود ہو تو ان کے درمیان کم از کم ایک نقطہ ضرور ہوگا جس پر کا مماس محور لا کے متوازی ہو۔ مثال کے طور پر دیکھو جب لا کی ترسیم صفحہ ۴۲ پر نیز شکل ۹ صفحہ ۳۶۔

یہ احتیاط سے یاد رکھنے کے قابل ہے کہ استدلال میں یہ شرائط ضروری ہیں کہ فہ (لا) اور فہَ (لا) میں سے ہر ایک کی تمام وقفہ لا = ا سے لا = ب میں ایک معین (اور اس لئے محدود) قیمت ہے۔ ذیل کی اشکال میں مختلف صورتیں ہیں جنکے لئے ایک یا زیادہ شرائط کے ٹوٹ جانے کے باعث نتیجہ قائم نہیں رہتا۔



شکل (۲۹)

۹۱ اس دفعہ کے مسئلہ کی ذرا زیادہ وسیع شکل یہ ہے کہ اگر فہ (لا) کی وہی قیمت (یعنی) ہو لا = ا اور لا = ب دونوں کے لئے اور اگر فہ (لا) ... مسلسل اور محدود ہونے کے متعلق وہی اوپر کے شرائط پورا کریں تو مشتق تفاضل فہ (لا) کا ا اور ب کے درمیان لا کی ایک ایک قیمت ... صفر ہوگا۔ اوپر کے استدلال کو ... پر لگانے سے ... ہے۔

مثال ۱ ۔ اگر فہ (لا) = (لا - ا) (لا - ب)

تو

فہ (لا) = ۲ لا - (ا + ب)

اس لئے فہ (لا) صفر ہوتا ہے لا = $\frac{1}{2}$ (ا + ب) کے لئے جو ا اور ب کے درمیان ہے۔

مثال ۲ ۔ اگر فہ (لا) = $\frac{\text{جب لا}}{\text{لا}}$ تو فہ (لا) = $\frac{\text{لا جم لا - جب لا}}{\text{لا}^2}$

یہاں فہ (لا) = ۰ جبکہ لا = π اور لا = ۲π اسلئے فہ (لا) کو لا کی کسی درمیانی قیمت کے لئے صفر ہونا چاہئے یہ ... مثال ۱ کے نتیجہ کے مطابق ہے جہاں ثابت کیا گیا تھا کہ مساوات ... کی ایک اصل π اور $\frac{3}{2}$π کے درمیان ہے۔

۵۰ ۔ مساواتوں کے نظریہ میں استعمال۔

اگر فہ (لا) کا مشتق صحیح تفاعل ہو تو فہ (لا) اور اس کا مشتق فہ (لا) دونوں لا کی تمام محدود قیمتوں کے لئے مسلسل اور محدود ہیں اس لئے مساوات

فہ (لا) = ۰ .... (۱)

کی کم از کم ایک حقیقی اصل مساوات

فہ (لا) = ۰ .... (۲)

کی دو حقیقی اصلوں کے درمیان واقع ہوگی۔ اس نتیجہ کو (...) کے نام سے موسوم کرتے ہیں اور مساواتوں کے نظریہ میں یہ ...

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ... دو سے زیادہ ایک حقیقی اصل (۱) کی دو متصل ... واقع نہیں ہو سکتی ہے یعنی (۱) کی اصلیں (۲) کی اصلوں کے درمیان ...

مثال ۱۔ اگر $ف(لا) = ۴لا^۳ - ۲۱لا^۲ + ۱۸لا + ۲۰$

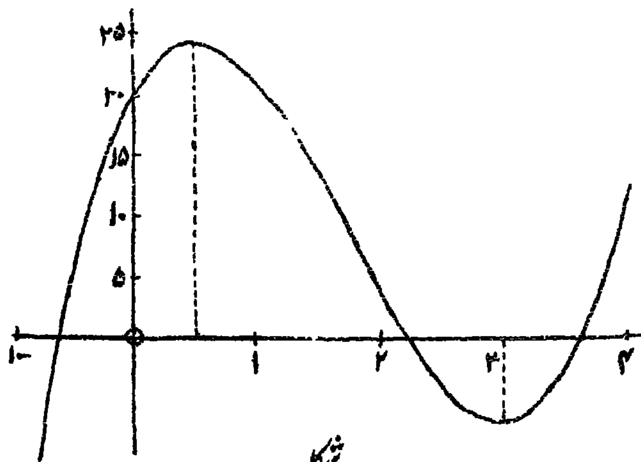
تو $فَ(لا) = ۱۲لا^۲ - ۴۲لا + ۱۸ = ۶(۲لا - ۱)(لا - ۳)$

پس $ف(لا) = ۰$ کی حقیقی اصلیں اگر ہیں تو وقفوں $-\infty$ اور $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{2}$ اور ۳، ۳ اور $+\infty$ کے درمیان باری باری واقع ہونگی۔ اب اگر

$لا = -\infty ، \frac{1}{2} ، ۳ ، \infty$ تو

ف(لا) کی علامات ہیں − ، + ، − ، +

پس ف(لا) کو اوپر کے وقفوں میں سے ہر ایک میں (دفعہ ۹) ایک دفعہ لازماً صفر ہونا چاہئے۔ اس لئے تین حقیقی اصلیں ہیں۔ ذیل کی شکل میں ف(لا) کی ترسیم درج ہے۔



شکل (۳۰)

اگر ف(لا) کی شکل ... مسلسل ترسیم سے مثلاً اس کے ایک مستقل کے جمع یا تفریق کرنے سے

اس کی دو اصلیں باہم منطبق کردی جائیں تو فہَ(لا) = ۰ کی اصل بھی جو ان کے درمیان واقع ہے ان کے ساتھ منطبق ہو جائیگی۔

پس فہ(لا) = ۰ کی دوسری اصل فہَ(لا) = ۰ کی بھی اصل ہوتی ہے

زیادہ عام طور پر فہ(لا) = ۰ کی ر مرتب والی ضعفی اصل کو اگر ایسا تصور کیا جائے کہ یہ الگ الگ ر اصلوں کے منطبق ہونے سے پیدا ہوتی ہے تو فہَ(لا) = ۰ کی (ر-۱) درمیانی اصلیں ہونگی جو منطبق ہو جائینگی۔

اس سے کسی دی ہوئی جبریہ مساوات کی ضعفی اصلیں اگر کوئی ہوں تو ان کے معلوم کرنے کا طریقہ حاصل ہوتا ہے۔ اگر فہ(لا) کی ر ضعفی اصل عہ ہو تو

فہ(لا) = (لا - عہ)^{ر} خہ(لا) .... (۳)

جہاں خہ(لا) منطق صحیح تفاعل ہے۔ اس لیے

فہَ(لا) = (لا - عہ)$^{ر-۱}$ {ر خہ(لا) + (لا - عہ) خہَ(لا)} .... (۴)

یعنی (لا - عہ)$^{ر-۱}$ تفاعلوں فہ(لا) اور فہَ(لا) کا مشترک جزو ضربی ہوگا۔ اور یہ ظاہر ہے کہ (لا - عہ)$^{ر-۱}$ مشترک جزو ضربی نہیں ہوگا جب تک کہ فہ(لا) (لا - عہ)^{ر} پر تقسیم نہ ہو سکے۔

پس اگر فہ(لا) کی کوئی ضعفی اصلیں ہوں تو انہیں معمولی جبریہ طریقوں کی مدد سے فہ(لا) اور فہَ(لا) کے مشترک اجزائے ضربی دریافت کرنے سے حاصل کیا جاتا ہے۔

مثال ۲۔ فہ(لا) = لا^{۴} - ۹ لا^{۲} + ۴ لا + ۱۲

فہَ(لا) = ۴ لا^{۳} - ۱۸ لا + ۴

معمولی جانچ سے حاصل ہوتا ہے کہ لا - ۲، فہ(لا) اور فہَ(لا) کا مشترک جزو ضربی ہے، اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ (لا - ۲)^{۲} فہ(لا) کا جزو ضربی ہے۔ باقی کے اجزا آسانی سے معلوم ہو جاتے ہیں، پس

فہ(لا) = (لا - ۲)^{۲} (لا + ۱)(لا + ۳)

۱۰۱

مثال ۳ - شرط مطلوب ہے کہ کعبی مساوات $لا^3 + ق لا + ر = 0$ ....(۵)
کی دوہری اصل ہو -
دوہری اصل اگر ہو تو اسے اس مساوات کو پورا کرنا چاہیے

$۳ لا^2 + ق = 0$ یا $لا = \pm \sqrt{-\frac{1}{3} ق}$ ....(۶)

(۵) میں درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$ر = \pm \frac{2}{3} \sqrt{-\frac{1}{3} ق^3}$ یا $ر^2 = -\frac{4}{27} ق^3$ ....(۷)

جو مطلوبہ شرط ہے -

۵۱ - اعظم اور اقل قیمتیں -

مسلسل تفاعل کی "اعظم" قیمت وہ ہے جو بڑی ہو اور "اقل" قیمت وہ ہے جو چھوٹی ہو دونوں طرف کی بالکل پاس کی قیمتوں سے -
زیادہ صحت کے ساتھ اسے یوں بیان کرسکتے ہیں۔ فہ (لا) اعظم ہوگا لا = لا کے لئے اگر دو مثبت مقداریں صہ، صہ ایسی معلوم ہوسکیں کہ فہ (لا) بڑا ہو ہر ایک قیمت سے جو فہ (لا) لا = لا - صہ سے لا = لا + صہ تک ... ایسی ہی قیمت کے جواب میں فہ (لا) اختیار کرتا ہے ... کے لئے -
چونکہ تفاعل کی ایسی ... قیمت ... جو لا کے بالکل پاس ہوں اس لئے اعظم قیمت ضروری نہیں کہ تفاعل کی بڑی سے بڑی قیمت ہو اور اقل ... سے چھوٹی - دیکھو شکل (۲۰)
فی الحال ہم بحث کو اس صورت تک محدود رکھینگے (اور اس کے اندر تمام ضروری اطلاقات شامل ہیں) جہاں وسعت زیر بحث کے تمام نقطوں پر مشتق قابل تعین اور محدود ہو - دفعہ ۴۸ کے استدلال سے ظاہر ہے کہ اگر فہ (لا) اعظم یا اقل ہو تو فہ (لا) صفر سے مختلف نہیں ہوسکتا -

کیونکہ اگر یہ مثبت یا منفی ہو تو لا کی عین پڑوس میں [illegible]
فہ (لا) بڑا ہوگا اور دوسروں کے لئے چھوٹا ہوگا [illegible]
فہ (لا) سے - پس صورت مجوزہ میں فہ (لا) کی اعظم یا اقل [illegible]
کے لئے پہلی شرط یہ ہوگی کہ فہ (لا) معدوم ہو -

یہ شرط ضروری ہے کافی نہیں - مزید تحقیق کی خاطر فرض کرو کہ نقطہ
لا کے دونوں طرف [illegible]
یا تو بالکل مثبت ہے یا [illegible] منفی [illegible] (لا) [illegible]
کے لئے جو لا - ص اور لا کے درمیان واقع ہوں [illegible]
[دفعہ ۴/۸] اس وقفہ کے اندر [illegible]
فہ (لا) وقفہ لا اور لا + ص کے درمیان [illegible]
منفی ہو تو فہ (لا) [illegible] کے ساتھ اس وقفہ میں [illegible]
یہ دونوں شرائط پورے ہوں تو فہ (لا) اعظم ہوگا -

یہ ظاہر ہے کہ اگر علامات اس طور پر نہ ہوں تو فہ (لا) تفاعل کی
بڑی سے بڑی قیمت وقفہ لا - ص اور لا + ص کے درمیان
نہیں ہو سکتی -

اسے مختصراً یوں بیان کر سکتے ہیں [illegible]
شرط کہ فہ (لا) [illegible] (لا) کی [illegible]
بدلے + سے - جیسے لا بڑھتے بڑھتے [illegible]

اسی طرح حاصل ہوتا ہے کہ ضروری [illegible]
کہ فہ (لا) [illegible] کی اقل قیمت [illegible]
بدلے - سے + جیسے لا بڑھتے بڑھتے قیمت [illegible]

* یعنی ایسی صورتوں کو ہم خارج کر دیتے ہیں جہاں [illegible]
اندر جس میں لا شامل ہوتا ہے لا [illegible] علامت بدلتا ہے [illegible]
لا جب [illegible] میں ایک ایسی مثال ہے -

ہندسی زبان میں اسے یوں بیان کرتے ہیں کہ جب ایک منحنی کا معین اعظم ہو تو ڈھال کو مثبت سے بدلکر منفی ہو جانا چاہئے اور جب معین اقل ہو تو ڈھال کو منفی سے بدلکر مثبت ہو جانا چاہیے۔ اوپر کی اشکال سے اسکی کافی توضیح ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر دیکھو شکلیں ۹، ۱۳، ۱۴ اور ۳۰۔

جب کبھی مشتق تفاعل فہ (لا) معدوم ہو تو اصلی تفاعل فہ (لا) کے بڑھنے کی شرح (دفعہ ۲۶) تھوڑی دیر کے لئے صفر ہو جاتی ہے اور اسے یوں بیان کرتے ہیں کہ فہ (لا) کی قیمت ساکن ہے۔ جیسا پہلے بیان کیا گیا ہے یہ ضروری نہیں کہ ساکن قیمت اعظم یا اقل قیمت ہو کیونکہ ایسی صورتیں پیدا ہوتی ہیں جہاں فہ (لا) صفر ہو جاتا ہے مگر علامت نہیں بدلتا۔

اکثر ترتیب صورتوں میں جن میں مشتق تفاعل فہ (لا) مسلسل ہوتا ہے نیز قابل دریافت (اور محدود) تب یہ تفاعل قیمت صفر سے گذرتے ہی علامت بدل سکتا ہے نیز دفعہ ۹ سے ظاہر ہے کہ اگر تبدیلیاں + سے − اور − سے + ایک سے زیادہ ہوں تو یہ باری باری واقع ہونگی۔ اس لئے اعظم اور اقل قیمتیں بھی باری باری یا متبادلاً واقع ہوں گی۔ دیکھو شکل ۱۴ صفحہ ۴۲۔

مثال ۱۔ خط مستقیم پر ایک ذرہ حرکت کر رہا ہے اس کا فاصلہ س جو ایک اختیاری مبدأ سے ناپنا شروع کیا گیا ہے اعظم ہو گا جبکہ رفتار (فس/فت) علامت بدلتی ہے مثبت سے منفی اور اقل ہو گا جبکہ رفتار منفی سے مثبت ہوتی ہے۔

مثلاً ایک ذرہ جو جاذبہ ارض کے ماتحت اوپر کی طرف حرکت کرتا ہے اس کے لئے

س = ع ت − ½ ج ت²، فس/فت = ع − ج ت

پس فس/فت مثبت سے منفی ہوتا ہے جیسے ت بڑھتے بڑھتے قیمت ع/ج

میں سے گذرتا ہے۔ اونچائی س اُس وقت زیادہ سے زیادہ ہوتی ہے۔

مثال ۲ — بڑے سے بڑے رقبہ والا مستطیل معلوم کرو جس کا گھیر دیا گیا ہو۔ گھیر کو ۲ا فرض کرو۔ دو متصل اضلاع کے طول لا اور ا − لا لئے جا سکتے ہیں پس ہمیں تفاعل　لا (ا − لا) ....(۱) کی اعظم قیمت دریافت کرنا ہے۔

اس کا مشتق ا − ۲لا ہے جو علامت بدلتا ہے + سے − جیسے لا قیمت $\frac{ا}{۲}$ میں سے گذرتا ہے۔ اس لئے بڑے سے بڑے رقبہ والا مستطیل مربع ہے۔

مثال ۳ — ذیل کے تفاعل کی اعظم و اقل قیمتیں دریافت کرو۔

فا(لا) = ۴لا³ − ۲۱لا² + ۱۸لا + ۲۰ ....(۲)

فاَ(لا) = ۱۲ (لا − $\frac{۱}{۲}$)(لا − ۳) ....(۳)

یہ تفاعل صرف اس وقت علامت بدل سکتا ہے جبکہ لا قیمتوں $\frac{۱}{۲}$ اور ۳ میں سے گذرے۔ جب لا $\frac{۱}{۲}$ سے ذرا کم ہو تو دوسرے اور تیسرے اجزائے ضربی کی علامات − ہوتی ہیں لیکن جب لا $\frac{۱}{۲}$ سے ذرا بڑا ہو تو یہ علامتیں + ، − ہوتی ہیں۔ اس لئے جب لا قیمت $\frac{۱}{۲}$ میں سے گذرتا ہے تو فاَ(لا) علامت بدلتا ہے + سے − ؛ اسی طرح ہم دیکھتے ہیں کہ جیسے لا بڑھتے بڑھتے قیمت ۳ میں سے گذرتا ہے تو فاَ(لا) علامت بدلتا ہے − سے + ، اسلئے فا(لا) اعظم ہے جبکہ لا = $\frac{۱}{۲}$ اور اقل ہے جبکہ لا = ۳ ، (۲) میں لا کی یہ قیمتیں درج کرنے سے حاصل ہوتی ہے اعظم قیمت ۲۴$\frac{۱}{۴}$ اور اقل −۷ ، دیکھو شکل ۳۰۔

مثال ۴ — فا(لا) = $\frac{۲لا}{۱ + لا^۲}$ ، ....(۴)

فاَ(لا) = $\frac{۲(۱ − لا^۲)}{(۱ + لا^۲)^۲}$ ....(۵)

یہ علامت بدل سکتا ہے صرف لا = ± ۱ کے لئے۔ جیسے لا بڑھتے بڑھتے (جبریہ طور پر) قیمت −۱ میں سے گذرتا ہے، ۱ − لا² علامت بدلتا ہے − سے + ، اور جیسے لا +۱ میں سے بڑھتا ہے ۱ − لا² علامت بدلتا ہے + سے − ، اسلئے

لا = ۱ کے لئے فہ (لا) کی اقل قیمت ہے اور یہ -۱ ہے اور لا = ۱ کے لئے اعظم قیمت = ۱، دیکھو شکل ۱۲ صفحہ ۱۴۰)

مثال ۵- فہ (لا) = ۲لا / (۱ - لا^۲) .... (۶)

فہَ (لا) = ۲ (۱ + لا^۲) / (۱ - لا^۲)^۲ .... (۷)

یہاں فہَ (لا) ہمیشہ مثبت ہوتا ہے اور تفاعل فہ (لا) کی کوئی محدود اعظم اقل قیمتیں نہیں ہوتیں - دیکھو شکل ۱۱ صفحہ ۱۳۹)

مثال ۶- قائم مستدیر استوانہ معلوم کرو جس کا حجم دیا ہوا ہو اور جس کی سطح کا رقبہ کم سے کم ہو -

فرض کرو کہ استوانہ کا نیم قطر لا اور ارتفاع ما ہے - سطح ہوگی

۲ π لا^۲ + ۲ π لا ما

اگر دیا ہوا حجم ۲ π ار^۳ ہو تو لا^۲ ما = ۲ ار^۳

ما کو ساقط کرنے سے جس کو اقل بنانا ہے وہ ہے لا^۲ + ۲ار^۳/لا اس کا مشتق تفاعل ہے ۲ (لا - ار^۳/لا^۲) اور یہ علامت بدلتا ہے جیسے لا قیمت ار میں سے بڑھتا ہے اور یہ تبدیلی - سے + ہوتی ہے لہٰذا لا = ار سے سطح کم سے کم ہوتی ہے اور تب ما = ۲ار پس استوانہ کا ارتفاع قطر کے مساوی ہے -

طالب علم اس کی تصدیق کرے کہ ایسے استوانہ کی سطح مساوی حجم کے کرہ کی سطح کا ۱۴۴۷....... گنا ہے -

مثال ۷- تفاعل خ = (ا لا^۲ + ۲ ھ لا + ب) / (ا لا^۲ + ۲ ھ لا + ب) .... (۸)

کی "کھڑی" یا اصل قیمتیں دریافت کرو -

(ا لا^۲ + ۲ ھ لا + ب) خ = ا لا^۲ + ۲ ھ لا + ب .... (۹)

تفرق کرنے اور فرخ/فرلا کو صفر کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

(ا لا + ھ) ع = اَ لا + ھَ .... (۱۰)

لا سے ضرب دیکر (۹) سے منفی کرو تو

(ھ لا + ب) ع = ھَ لا + بَ .... (۱۱)

(۱۰) اور (۱۱) کے درمیان ع ساقط کرنے سے لا کی مطلوبہ قیمتیں ذیل کی مساوات درجہ دوم کی اصلوں کے طور پر حاصل ہونگی

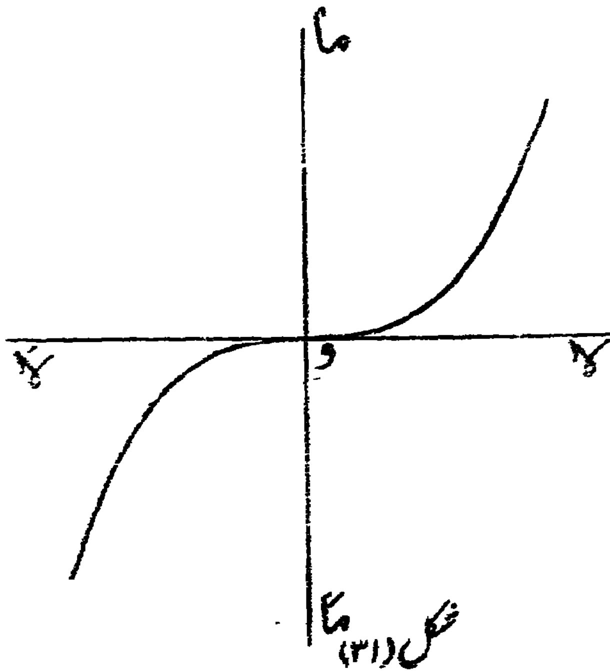
(ا ھَ - اَ ھ) لا² + (ا بَ - اَ ب) لا + (ھ بَ - ھَ ب) = ۰ .... (۱۲)

بخلاف اس کے اگر لا کو ساقط کیا جائے تو ع کی اصل قیمتیں ذیل کی مساوات درجہ دوم سے حاصل ہوتی ہیں

(ا ب - ھ²) ع² - (ا بَ + ب اَ - ۲ ھ ھَ) ع + (اَ بَ - ھَ²) = ۰ .... (۱۳)

مثال ۸ - اصل قیمت کی سادہ سے سادہ مثال جو اعظم یا اقل نہیں ہے ذیل کے تفاعل سے حاصل ہوتی ہے

فا (لا) ≡ لا³ .... (۱۴)



شکل (۳۱)

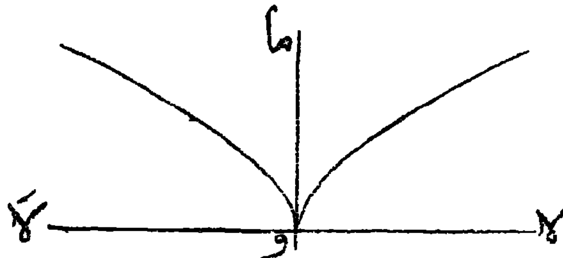
فہَ(لا) = ۳ لا^۲، جو لا = ۰ کے لئے صفر ہوتا ہے مگر قیمت صفر میں سے بڑھنے سے علامت نہیں بدلتا۔ اس لئے فہ(لا) اگرچہ "اچل" ہے مگر لا = ۰ کے لئے اعظم یا اقل نہیں ہے۔ شکل ۳۱ میں (۹) کی ترسیم دی گئی ہے۔

بعض اوقات ایسا ہوتا ہے کہ فہَ(لا) جو عام طور پر مسلسل ہو لا کی کسی اکیلی قیمت کے لئے غیر مسلسل ہو جاتا ہے۔ اگر عدم تسلسل کے ساتھ علامت کی تبدیلی بھی وقوع پذیر ہو یا لا بڑھتے بڑھتے قیمت زیر بحث میں سے ہو کر گذرے تو پہلے کے استدلال کی بنا پر اعظم یا اقل قیمت پیدا ہوگی۔

مثال ۹۔ اگر فہ(لا) = $اَ^{\frac{۱}{۳}}$ $لا^{\frac{۲}{۳}}$ .... (۱۵)

تو فہَ(لا) = $\frac{۲}{۳}\left(\frac{۱}{لا}\right)^{\frac{۱}{۳}}$ .... (۱۶)

جیسے لا قیمت صفر میں سے بڑھتا ہے فہَ(لا) − ∞ سے + ∞ تک بدلتا ہے اس لئے فہ(لا) اقل ہے لا = ۰ کے لئے۔ دیکھو شکل ۳۲۔



شکل (۳۲)

نیز شکل ۲۹ میں ایک نقطہ واقع ہوتا ہے جہاں فہَ(لا) غیر مسلسل ہے اور ایک محدود مثبت قیمت سے محدود منفی قیمت کی طرف گذرتا ہے یعنی وہاں اعظم ہے۔

۵۲۔ جبری طریقے

یہ قابل توجہ ہے کہ اعظم، اقل قیمتوں کے بعض مشہور سوالات محض جبری طریقوں سے بغیر احصا کی مدد کے آسانی حل ہو سکتے ہیں، یہ خاص نمبر پر دو درجی جملوں کی صورت میں ہے "تکمیل مربع" کا طریقہ ان سب پر اسانی

لگ سکتا ہے۔

سوالات کا حل اکثر اوقات ذیل کی مماثلات پر لاکے منحصر کیا جاسکتا ہے

$$\text{لا ما} = \frac{1}{4}\{(\text{لا}+\text{ما})^2-(\text{لا}-\text{ما})^2\} \quad \ldots\ldots (1)$$

$$(\text{لا}+\text{ما})^2 = (\text{لا}-\text{ما})^2 + 4\,\text{لا ما} \quad \ldots\ldots (2)$$

$$\text{لا}^2+\text{ما}^2 = \frac{1}{2}\{(\text{لا}+\text{ما})^2+(\text{لا}-\text{ما})^2\} \quad \ldots\ldots (3)$$

پس اگر دو مثبت مقداروں کا حاصل جمع (لا + ما) دیا گیا ہو تو ان کا حاصل ضرب (لا ما) بڑے سے بڑا ہوگا جبکہ وہ باہم مساوی ہوں۔

اگر دو مثبت مقداروں کا حاصل ضرب دیا گیا ہو تو اِن کا حاصل جمع چھوٹے سے چھوٹا ہوگا جبکہ یہ باہم مساوی ہوں۔

اگر دو مقداروں کا مجموعہ دیا گیا ہو تو اِن کے مربعوں کا مجموعہ کم سے کم ہوگا جبکہ یہ باہم مساوی ہوں۔

مثال ۱۔ دفعہ ۱۵ مثال ۲ میں

$$\text{لا}(\text{ا}-\text{لا}) = \frac{1}{4}\text{ا}^2-\left(\text{لا}-\frac{\text{ا}}{2}\right)^2$$

چونکہ آخری رقم صفر سے نیچے نہیں جاسکتی اس لئے اس جملہ کی بڑی سے بڑی قیمت $\frac{1}{4}\text{ا}^2$ ہے جبکہ $\text{لا}=\frac{\text{ا}}{2}$

مثال ۲۔ جملہ $2\text{لا}^2-3\text{لا}+2$ اس شکل میں رکھا جاسکتا ہے

$$2\left(\text{لا}^2-\frac{3}{2}\text{لا}+1\right) = 2\left(\text{لا}-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{8}$$

اس جملہ کی کم سے کم قیمت $\frac{7}{8}$ ہے جبکہ $\text{لا}=\frac{3}{4}$

مثال ۳۔ دئے ہوئے دائرہ میں جو بڑے سے بڑا مستطیل بن سکتا ہے اسے معلوم کرو۔

اگر اضلاع ۲لا، ۲ما ہوں تو لا ما کو اعظم بنانا مقصود ہے اس شرط کے ماتحت کہ $\text{لا}^2+\text{ما}^2=\text{ر}^2$ جہاں ر دائرہ کا نصف قطر ہے۔

$$2\,\text{لا ما} = \text{لا}^2+\text{ما}^2-(\text{لا}-\text{ما})^2 = \text{ر}^2-(\text{لا}-\text{ما})^2$$

جو بڑے سے بڑا ہوگا جبکہ لا = ما، اس لئے بڑے سے بڑے رقبہ والا اندرونی مستطیل

مربع ہے۔

مثال ۴- ا قم² طا + ب مس² طا کی کم سے کم قیمت معلوم کرو طا کی ان قیمتوں کے لئے جو صفر اور π/۲ کے درمیان ہوں۔

ا قم² طا × ب مس² طا کا حاصل ضرب مستقل ہے اس لئے ان کا مجموعہ کم سے کم ہے جب وہ مساوی ہوں یعنی جب

مس طا = (ا/ب)^{۱/۴} اس لئے مجموعہ کی کم سے کم قیمت ہے ۲ (اب)^{۱/۲}۔

مثال ۵- گردشی مکافی نما کو اس کے محور پر عمود وار مستوی سے کاٹنے سے مقطوعہ بنایا گیا ہے اس کے اندر جو بڑے سے بڑا اسطوانہ بن سکتا ہے اسے معلوم کرو۔

فرض کرو کہ مکافی نما ما² = ۴ ا لا ....(۴)

کو محور لا کے گرد گھمانے سے پیدا ہوتا ہے محور کا طول ل ہے اور پیدا سے اسطوانہ کے قریب سرے کا فصل لا ہے۔ اسطوانہ کا حجم ہے

π ما² (ل - لا) = π ما² (ل - ما²/۴ا) ....(۵)

اب مقادیر ما² اور ۴ا ل - ما² کا مجموعہ مستقل ہے ان کا حاصل ضرب بڑے سے بڑا ہوگا جب یہ مساوی ہوں یعنی

ما² = ۲ ا ل یا لا = ½ ل ....(۶)

اس لئے اسطوانہ کی اونچائی مقطوعہ کی اونچائی کا نصف ہے۔

۵۳- متعدد متغیروں والے تفاعلوں کی اعظم اور اقل قیمتیں۔

یہاں پر صرف مختصر ذکر کر دیا جائیگا کہ دو یا زیادہ متبوع متغیروں کی صورت میں اوپر کے نتائج کی توسیع کیونکر ہو سکتی ہے۔

سب سے پہلے ہم تفاعل

ع = فی (لا، ما) ....(۱)

کی اعظم اور اقل قیمتوں کے معلوم کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔

پہلی شرط یہ ہے کہ لازماً ایک ساتھ

$$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} = 0 \text{ ، } \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} = 0 \quad \text{.......... (۲)}$$

جہاں تفرقی سر جزوی ہیں دیکھو دفعہ ۱۴۲ کیونکہ اگر ع تا حاصل کی کسی اور ایسی قیمت سے جو لا، ما کو خاص حدود کے اندر بدلنے سے حاصل ہو بڑا (یا چھوٹا) ہو تو ع بوجوہ مستحکم اعظم (یا اقل ہوگا) جبکہ ما کو مستقل رکھا جائے اور صرف لا بدلے۔ اس سے بالعموم لازم آتا ہے [illegible] (یا اقل) ہونا چاہئے جبکہ لا مستقل رکھا جائے اور صرف ما بدلے۔

اس سے لازم آتا ہے کہ $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} = 0$ ۔

۱۰۸ پہلے کی طرح یہ شرائط ضروری ہیں کافی نہیں [illegible] کی مزید تحقیق آئندہ سولھویں باب میں ہوگی [illegible] اقل قیمتیں [illegible] غیر متعلق ذرائع سے [illegible] شرائط (۲) سے ایسی صورتوں میں سب جگہ [illegible] ضروری ہے۔

مثال۔ دئے ہوئے حجم والا مستطیلی متوازی السطوح معلوم کرو جس کی سطح کم سے کم ہو۔
فرض کرو کہ لا، ما، ی کنارے ہیں اور $ا^3$ دیا ہوا حجم ہے۔
چونکہ $\text{لا ما ی} = ا^3$ .... (۳) تفاعل جو کم سے کم ہوگا وہ ہے

$$ع = \text{لا ما} + \text{ما ی} + \text{ی لا} = \text{لا ما} + \frac{ا^3}{\text{لا}} + \frac{ا^3}{\text{ما}} \quad \text{....... (۴)}$$

شرائط $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} = 0$ ، $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} = 0$ سے ملتا ہے

$\text{لا}^2 \text{ما} = ا^3$ ، $\text{لا ما}^2 = ا^3$ اور ان مساواتوں کا حقیقی حل [illegible] ہے کہ
$\text{لا} = \text{ما} = ا$ ، نیز $ی = ا$ ۔

لا، ما چونکہ اس سوال میں لازماً مثبت ہیں اس لئے (۴) سے ظاہر ہے کہ متوازی السطوح کی سطح کی نچلی انتہا ہے۔ اوپر کی تحقیق سے ظاہر ہے کہ یہ انتہا نہیں پہنچتی جب تک کہ شکل مکعب نہ ہو۔

دفعہ ۵۲ کے مطابق کئی سوالوں کا حل بذریعہ جبری متماثلات سے حاصل ہو سکتا ہے مثلاً

$$\text{لا}^2+\text{ما}^2+\text{ی}^2=\frac{1}{3}\left\{(\text{لا}+\text{ما}+\text{ی})^2+(\text{ما}-\text{ی})^2+(\text{ی}-\text{لا})^2+(\text{لا}-\text{ما})^2\right\}\quad(5)$$

$$\text{ما}\,\text{ی}+\text{ی}\,\text{لا}+\text{لا}\,\text{ما}=\text{لا}^2+\text{ما}^2+\text{ی}^2-\frac{1}{2}\left\{(\text{ما}-\text{ی})^2+(\text{ی}-\text{لا})^2+(\text{لا}-\text{ما})^2\right\}\quad(6)$$

یعنی اگر ایک خط مستقیم کو تین حصوں میں تقسیم کیا جائے تو ان حصوں کے مربعوں کا مجموعہ کم سے کم ہوتا ہے جبکہ یہ حصے مساوی ہوں۔

متوازی السطوح جو ایک دائرہ کے اندر ($\text{لا}^2+\text{ما}^2+\text{ی}^2=\text{ر}^2$) بن سکے اس کی سطح زیادہ سے زیادہ ہوتی ہے جبکہ یہ مکعب ہو۔

۵۴۔ تفرقوں کی ترقیم ۔ دفعہ ۴۸ کی مساوات

$$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}=\text{فَ}(\text{لا})+\text{ثہ ما}\quad\ldots\ldots(1)$$

کی طرف پھر ہم رجوع کرتے ہیں۔ اسے یوں لکھا جا سکتا ہے

$$\text{مف ما}=\text{فَ}(\text{لا})\,\text{مف لا}+\text{ثہ ما مف لا}\quad\ldots(2)$$

جیسے مف لا صفر کے قریب آتا جاتا ہے بائیں جانب کی دوسری رقم پہلی رقم کے مقابلہ میں خفیف اور کم ہو جاتی ہے کیونکہ ثہ ما کی انتہائی قیمت صفر ہے۔ اس لئے یہ تقریباً زیادہ صحیح ہوتا جاتا ہے کہ

$$\text{مف ما}=\text{فَ}(\text{لا})\,\text{مف لا}\quad\ldots\ldots(3)$$

یہ مساوات ان معنوں میں پیدا نہیں ہوتی کہ طرفین تقریباً صفر ہیں بلکہ اس لحاظ سے کہ طرفین کی نسبت ایک کے قریب آتی جاتی ہے۔ ان مصنوعی معنوں میں اس مساوات کو اکثر اوقات اس طرح

لکھتے ہیں

فر ما = فما (لا) فر (لا) .... (۴)

صفر ہونے والی مقداروں مف لا، مف ما کو تفرقے کہا جاتا ہے۔

نوٹ: ضابطہ (۴) میں فما (لا) کا جو مقام ہے اس کے لحاظ سے اس کو "تفرقی سر" کہا جاتا ہے۔

طالب علم اوپر کے طرز بیان کو ناروا خیال نہ کریں یہ محض دستور یزدی ہے۔ اس کے استعمال کی غرض صرف یہ ہے کہ جہاں کہیں حسابات میں مقداریں مف لا، مف ما شامل ہوتی ہوں جنہیں بعد میں انتہائی طور پر صفر ہو جانا ہے ان میں کسی منزل پر مف ما کی بجائے فما (لا) مف لا رکھ دیا جا سکتا ہے جبکہ یہ واضح ہو کہ دوسرے رتبہ کی مقداروں کے نظر انداز کر دینے سے آخری جواب کی صحت پر کوئی اثر نہیں پڑے گا۔

۵۵- چھوٹی تصحیحات کا محسوب کرنا۔ تقریبی مساوات

مف ما = فما (لا) مف لا کو ایک تقریبی ضابطہ [illegible] میں استعمال کیا جا سکتا ہے جہاں [illegible] میں نقائص کی قیمت پر اثر محسوب کرنا [illegible] دیکھا ہے باقی ماندہ غلطی یا خطا فما (لا) مف لا [illegible] ایک چھوٹی کسر ہوگی جبکہ مف لا نہایت چھوٹا ہو۔ اس [illegible] استعمال یہ ہے کہ کسی عددی نتیجہ میں جو کسی خاص معطیات کی بنا پر حاصل کیا گیا ہو [illegible] یا خطا کی مقدار معلوم کی جائے جبکہ معطیات [illegible] نادرستیوں کی مقدار معلوم ہو۔

اوپر کا طریقہ ایک لحاظ سے مکمل نہیں ہے [illegible] مقدار کی کوئی نشان دہی نہیں [illegible] وہاں ثابت کیا جائیگا کہ

مف ما = فما (لا) + طما مف لا [illegible]

جہاں ط ہ کوئی مقدار ہے صفر اور ا کے درمیان - اس لئے اگر وقفہ لا تا لا + مف لا میں مشتق تفاعل کی بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی قیمتیں ا اور ب ہوں تو تقریب (۱) میں خطا کی مقدار (ا - ب) مف لا سے بڑی نہیں ہو سکتی -

مثال ۱ - لوک جیبوں کی جدول میں ایک منٹ کے لئے فرق محسوب کرو -

اگر ما = لوک جب لا تو $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ = مہ مم لا

اور مف ما = مہ مم لا مف لا تقریباً بشرطیکہ مف لا کو قوسی پیمانہ میں بیان کیا جائے - رکھو　　۱۱۰

مف لا = ۱ کا قوسی ناپ = $\frac{۲}{۱۰۸۰۰}$ = ۰۰۰۲۹۰۹ء

تو حاصل ہوگا مف ما = ۰۰۰۱۲۶۳ء × مم لا

یہ عددی جزو ضربی اس فرق کے مطابق ہے جو ۱ کے لئے ۵ ۴ کے قرب میں جدولوں میں مندرج ہے -

مثال ۲ - ایک مثلث کے اضلاع ا، ب اور درمیانی زاویہ ج ناپا گیا ہے اگر زاویہ کی پیمائش میں ذراسی خطا رہ جائے تو تیسرے ضلع کے محسوبہ طول ج میں خطا معلوم کرو -

ج^۲ = ا^۲ + ب^۲ - ۲ اب جم ج .... (۳)

اس مفروض پر کہ صرف ج اور ج بدلیں

ج مف ج = اب جب ج مف ج

جس سے مف ج = $\frac{\text{اب}}{\text{ج}}$ جب ج مف ج = اجب ب مف ج

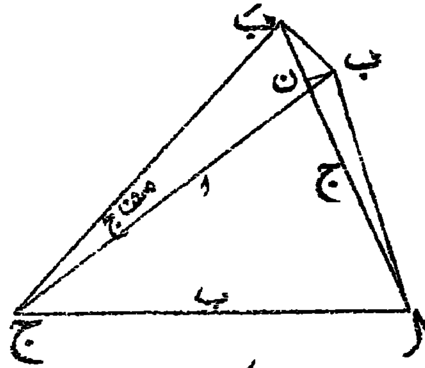
.... (۴)

یہ نتیجہ ہندسی طور پر بھی حاصل ہو سکتا ہے ' مثلاً اگر شکل میں ∠ب ج ب = مف ج اور ب ان ' ا ب پر عمود وار کھینچا جائے تو بالآخر

مف ج = ب ان = ب ا ب جم ب ب ن

= ا مف ج جب ج ب ا = ا مف ا ج جب ب

دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقداروں سے اگر قطع نظر کی جائے ... کے ناپنے میں اگر



شکل (۳۳)

ذراسی غلطی ہو تو اس کے جواب میں ج کے محسوب کرنے میں غلطی ہوگی ۔ اسے ہم اس مفروض کی بنا پر معلوم کر سکتے ہیں کہ ا ، ج صرف بدلتے ہیں چنانچہ

ج مف ج = (ا - ب جم ج) مف ا + ج مف ب مف ا

یا مف ج = جم ب مف ا .... (ذ)

اوپر کے نتیجہ کی طرح اس کا بھی ہندسی ثبوت آسانی سے دیا جا سکتا ہے۔

۵۶ — اوسط قیمت کا مسئلہ ۔ نتائج

ذیل کا مسئلہ نہایت ضروری ہے اور یہ دفعہ ۴۹ کے مسئلہ کی توسیع ہے۔ اگر تفاعل فہ (لا) مسلسل ہو اور اس کا مشتق معین یا قابل ... قیمت رکھتا ہو تمام وقفہ لا = ا سے لا = ب تک تو

$$\frac{\text{فہ (ب) - فہ (ا)}}{\text{ب - ا}} = \text{فہ}'(\text{لا}_1) \quad .... (1)$$

جہاں لا₁ ، لا کی ایک قیمت ہے ا اور ب کے درمیان۔

ذیل کے تفاعل پر غور کرو

$$\text{فما(لا)} - \text{فما(ا)} - \frac{\text{فما(ب)} - \text{فما(ا)}}{\text{ب} - \text{ا}}(\text{لا} - \text{ا}) \quad ......(۲)$$

یہ تفاعل شرائط مذکورہ کے تحت، لا = ا سے لا = ب تک مسلسل ہے اور لا کی ان ہر دو قیمتوں لا = ا اور لا = ب کے لئے یہ صفر ہوتا ہے، پس اس کا مشتق تفاعل

$$\text{فَما(لا)} - \frac{\text{فما(ب)} - \text{فما(ا)}}{\text{ب} - \text{ا}} \quad ....(۳)$$

ا، ب کے درمیان لا کی کسی ایک قیمت (لا۱) کے لیے لازماً صفر ہوگا۔ اس سے بیان (۱) ثابت ہوتا ہے۔

اس نتیجہ کا مفہوم اور اسکے ثبوت کی نوعیت قابل لحاظ ہے۔ ہندسی تعبیر اس کی حسب ذیل ہے۔ ذیل کی شکل میں

و ا = ا، و ب = ب

پ ا = فما(ا)، ق ب = فما(ب)

$$\text{اور پس ق پ ن} = \frac{\text{ق ن}}{\text{پ ن}} = \frac{\text{فما(ب)} - \text{فما(ا)}}{\text{ب} - \text{ا}} \quad ......(۴)$$

شکل (۳۴)

پس مسئلہ کا مفہوم یہ ہے کہ (قیود مذکورہ کے ماتحت) ب اور ق کے درمیان کوئی ایک نقطہ ایسا ہے کہ جس پر منحنی ما = فہ (لا) کا مماس وتر ب ق کے متوازی ہے۔

وتر ب ق کی مساوات یہ ہے

$$ما = فہ (ا) + \frac{فہ (ب) - فہ (ا)}{ب - ا} (لا - ا) \cdots\cdots (۵)$$

جس کی آسانی سے تصدیق ہو سکتی ہے اور ظاہر ہے کہ جملہ (۲) منحنی کے معین اور وتر کے متناظر معین کا فرق ہے۔ یہ فرق ب اور ق پر صفر ہوتا ہے، پس ب اور ق کے درمیان کم از کم ایک نقطہ ضرور ہونا چاہیئے جہاں یہ فرق اعظم یا اقل ہو۔

مثال اگر فہ (لا) = لا^2 تو $\frac{فہ (ب) - فہ (ا)}{ب - ا} = ب + ا$

جو فہَ (لا) کی قیمت ہے جبکہ لا = $\frac{1}{2}$ (ا + ب)

اس بیان کا ہندسی مرادف یہ ہے۔ مکافی کا کوئی وتر اس مماس کے متوازی ہوتا ہے جو وتر کی تنصیف کرنے والے قطر کے سرے پر کھینچا جائے۔

کسر $\frac{فہ (ب) - فہ (ا)}{ب - ا}$ ......(۶) یعنی تفاعل کے اضافہ کی نسبت متغیر متبوع کے اضافہ کے ساتھ اس شرح کا ناپ ہے جسے ہم کہینگے تفاعل کے "اضافہ کی اوسط شرح" وقفہ (ب - ا) کے اندر۔ پس اس مسئلہ کا مفہوم یوں بیان ہو سکتا ہے کہ مذکورہ شرائط کے ماتحت کسی وقفہ میں اضافہ کی اوسط شرح، اسی وقفہ کے اندر کسی ایک نقطہ پر اضافہ کی اصلی شرح کے مساوی ہوگی۔

مثلاً وقت کے کسی وقفہ میں ایک متحرک نقطہ کی اوسط رفتار، اس وقفہ میں کسی ایک آن کی اصلی رفتار کے مساوی ہوگی۔

نتیجہ (۱) کو بیان کرنے کے اور بھی طریقے قابل توجہ ہیں۔ اس امر کو کہ لا$_1$ ا اور ب کے درمیان واقع ہے اس طور پر بیان کیا جا سکتا ہے

لا = ا + طہ (ب − ا) .... (۷)

جہاں طہ ایسی مقدار ہے جو صفر اور ایک کے درمیان واقع ہے۔ طہ کی ٹھیک قیمت بالعموم ا اور ب کی قیمتوں پر منحصر ہوگی۔ ب کی بجائے ا + ھ لکھنے سے مسئلہ اوسط قیمت کی بڑی مفید صورت حاصل ہوتی ہے

(فہ (ا + ھ) − فہ (ا)) / ھ = فَہ (ا + طہ ھ) .... (۸)

یا فہ (ا + ھ) = فہ (ا) + ھ فَہ (ا + طہ ھ) ...... (۹)

اب اگر ا کی بجائے لا اور ھ کی بجائے مف لا لکھا جائے تو حاصل ہوتا ہے

مف فہ (لا) = فَہ (لا + طہ مف لا) مف لا ..... (۱۰)

مسئلہ ماقبل سے ایک ضروری استنباط یہ ہے کہ اگر

فَہ (لا) = ۰ .... (۱۱)

لا کی تمام قیمتوں کے لئے جو ایک خاص وقفہ کے اندر ہیں تو فہ (لا) اس تمام وقفہ میں مستقل ہوگا۔ کیونکہ اگر فہ (لا) بدلتا ہو تو فرض کرو کہ لا کی دو قیمتوں ا، ب کے لئے اس کی نامساوی قیمتیں ہیں۔ کسر

(فہ (ب) − فہ (ا)) / (ب − ا) .... (۱۲)

کی قیمت اس صورت میں صفر سے مختلف ہوتی اور اس لئے ان کے درمیان لا کی کوئی ایک قیمت ہوتی جس کے لئے فَہ (لا) صفر سے مختلف ہوگا، مگر یہ مفروضہ کے خلاف ہے۔

علاوہ اس کے اگر دو تفاعلات فہ (لا) اور پہ (لا) کے مشتق ایک سعت کے اندر لا کی تمام قیمتوں کے لئے مساوی ہوں تو وہ صرف بلحاظ ایک مستقل کے ایک دوسرے سے مختلف ہو سکتے ہیں۔ کیونکہ مفروضہ کی رو سے

فَہ (لا) − پَہ (لا) = ۰ .... (۱۳)

یا خ/و لا {فہ (لا) − پہ (لا)} = ۰ .... (۱۴)

اس لئے فہ(لا) - پہ(لا) = مستقل ...... (یہ پہلی مخصوص شکل ہے)

اگر (۲) کی بجائے زیادہ عام تفاعل لیا جائے یعنی

فہ(لا) - فہ(ا) - $\frac{\text{فہ(ب) - فہ(ا)}}{\text{پہ(ب) - پہ(ا)}}$ [پہ(لا) - پہ(ا)] ...(۱۶)

تو اسی طرح کے شرائط کے تحت یہ تفاعل ہو جاتا ہے اس کا مشتق تفاعل

فہ(لا) - $\frac{\text{فہ(ب) - فہ(ا)}}{\text{پہ(ب) - پہ(ا)}}$ پہ(لا) .... (۱۷)

لا کی کسی ایک قیمت کے لئے صفر ہوگا جو ا، ب کے درمیان ہو۔

یہ نتیجہ یوں بھی لکھا جا سکتا ہے

$\frac{\text{فہ(ا+ھ) - فہ(ا)}}{\text{پہ(ا+ھ) - پہ(ا)}} = \frac{\text{فہ(ا+ طہ ھ)}}{\text{پہ(ا+ طہ ھ)}}$ .... (۱۸)

اس لئے اگر فہ(ا) = ۰ پہ(ا) = ۰ .... (۱۹)

تو نہا $\frac{\text{فہ(ا+ھ)}}{\text{پہ(ا+ھ)}}$ = نہا $\frac{\text{فہ(ا+ھ)}}{\text{پہ(ا+ھ)}}$ .... (۲۰)

یہ ضابطہ غیر معین شکل "$\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$" کی قیمت معلوم کرنے میں بکثرت استعمال ہوتا ہے۔

۵۷ - ایک سے زیادہ متغیروں کے تفاعل کا جزوی تغیر

فرض کرو کہ ع = فہ(لا، ما) .... (۱)

لا، ما کا مسلسل تفاعل ہے نیز فرض کرو کہ جزوی مشتقات

$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}}$ ، $\frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}$ .... (۲)

بھی لا، ما کے مسلسل تفاعل ہیں۔

مان لو کہ ع کا اضافہ متعلقہ متغیروں کے اضافوں صف ......

جواب میں مف ع ہے یعنی

مف ع = فہ (لا + مف لا، ما + مف ما) - فہ (لا، ما) ...(۳)

دفعہ ۴۴ کی ہندسی تعبیر کے موافق افقی مستوی لا ما کے نقاط (لا، ما) اور (لا + مف لا، ما + مف ما) کے جواب میں سطح پر جو دو نقطے ہیں مف ع ان کے ارتفاعوں کا فرق ہے۔

اگر صرف لا کو بدلا جائے تو ع کا متناظر اضافہ دفعہ ۵۲ (۱۰) کی رو سے اس شکل کا ہوگا

پ مف لا ....(۴)

جہاں پ، لا، ما اور مف لا کا ایک خاص تفاعل ہے۔ اسی دفعہ سے اور جزوی مشتق کے معنی سے ظاہر ہے کہ پ کی انتہائی قیمت جبکہ مف لا کو لا انتہا کم کر دیا جائے پ ہے جہاں

پ = جف ع / جف لا ....(۵)

اگر صرف ما کو بدلا جائے تو ع کا اضافہ ہوگا

ق مف ما ....(۶)

جہاں ق ... انتہائی قیمت جبکہ مف ما کو لا انتہا کم کر دیا جائے یہ ہے

ق = جف ع / جف ما

اب ہم فرض کریں کہ ... تغیر (لا، ما) سے لا + مف لا، ما + مف ما تک دو منزلوں میں عمل میں آتا ہے۔ پہلی منزل میں صرف لا اور دوسری میں صرف ما بدلتا ہے تو ع کا کل اضافہ اس طرح ہوتا ہے

مف ع = پ مف لا + قَ مف ما ....(۸)

جہاں قَ، ق سے اس لحاظ سے مختلف ہے کہ دوسرے تغیر کا ابتدائی نقطہ (لا، ما) کی بجائے اب (لا + مف لا، ما) ہے۔

اگر ہم درست میں (۸) کی شکل دریافت کرو جبکہ مف لا، مف ما انتہا

صفر کی طرف مائل ہوں جبکہ ان کے درمیان کوئی معینہ نسبت قائم رہے۔
رکھو مف لا = عہ صہ، مف ما = بہ صہ ...... (۹)
جہاں عہ، بہ مستقل ہیں اور صہ لا انتہا چھوٹی مقدار ہے۔
اس طرح حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{مف ع}}{\text{پ مف لا + ق مف ما}} = \frac{\text{پ عہ + ق بہ}}{\text{پ عہ + ق بہ}} \quad \ldots\ldots (۱۰)$$

چونکہ مشتقات (۲) کے تسلسل کو ہم نے مان لیا ہے اس لئے پ اور ق بالترتیب انتہاؤں پ، ق کی طرف مائل ہوتے ہیں جبکہ صہ ←۰
پس مف لا، مف ما کو جتنا چھوٹا لیں اتنا ہی زیادہ تقریبی طور پر اگلی درستی لازم آتی ہے کہ

$$\text{مف ع} = \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} \text{ مف لا} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} \text{ مف ما} \quad \ldots (۱۱)$$

۱۱۵ اور وہ اس لحاظ سے کہ اس کے دونوں جانب کی نسبت انتہائی صورت میں اکائی کے مساوی ہوتی ہے۔
اس نتیجہ کو اکثر اس شکل میں بیان کیا جاتا ہے

$$\text{فر ع} = \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} \text{ فر لا} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} \text{ فر ما} \quad \ldots\ldots (۱۲)$$

علامات فر لا، فر ما، فر ع کو "تفرقے" کہتے ہیں اور فر ع، ع کا کل تفرقہ کہلاتا ہے۔
اوپر کا استدلال زیادہ کھولکر لکھا جا سکتا ہے اگر ان مقداروں کی جگہ جو پ اور ق سے تعبیر ہوتی ہیں صریحی جملے لکھے جائیں۔ اگر لکھا جائے

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} = \text{فہ}_1(\text{لا، ما})، \quad \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} = \text{فہ}_2(\text{لا، ما}) \quad \ldots (۱۳)$$

تو دفعہ ۵۶ کی رو سے

$$\text{کپ} = \frac{\text{فہ}(\text{لا}_1 + \text{مف لا}_1 \text{، وا}_1) - \text{فہ}(\text{لا}_1 \text{، وا}_1)}{\text{مف لا}} = \text{فہ}_1' (\text{لا}_1 \text{،} ...) \text{ + ضہ مف لا} ...$$

$$\text{قَ} = \frac{\text{فہ}(\text{لا}_1 + \text{مف لا}_1 \text{، وا}_1 + \text{مف وا}_1) - \text{فہ}(\text{لا}_1 + \text{مف لا}_1 \text{، وا}_1)}{\text{مف وا}} = \text{فہ}_2' ... \text{ + ضہ مف وا} \quad (15)$$

جہاں ضہ، ضہ ایسی مقداریں ہیں جو صفر ہو جاتی ہیں ... اسلئے

مف ع = فہ₁ (لا₁ + ضہ₁ مف لا₁ وا₁) مف لا + فہ₂ (لا₁ ، مف لا وا₁) ... ضہ مف وا، مف وا

(16) ....

چونکہ دفعہ ۴۳ کی تعریف کے مطابق فہ₁، فہ₂ مسلسل فرض کئے گئے ہیں مساوات کی انتہائی شکل یہ ہے

مف ع = فہ₁ مف لا + فہ₂ مف وا .... (17)

مساوات (۱۷) سے ظاہر ہے کہ اعظم یا اقل قیمت کے قرب میں ع کا تغیر دوسرے (یا اس سے اعلیٰ) رتبہ کی چھوٹی مقدار ہے کیونکہ ایسی صورت میں دفعہ ۵۲ -

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} = \cdot = \frac{\text{جف ع}}{\text{جف وا}} = \cdot \quad \text{......} (18)$$

پس کسی سطح کے اعظم یا اقل ارتفاع کے نقطہ پر مماسی سطح مستوی بالعموم افقی ہوگا۔ جیسا بتایا گیا ہے اس کا عکس لازماً درست نہیں - دیکھو دفعہ ۵۱ -

اوپر کے مسئلہ کی تعمیم متغیروں لا، وا، ی ..... کی کسی تعداد کے لئے بآسانی ہو سکتی ہے چنانچہ

$$\text{مف ع} = \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} \text{مف لا} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف وا}} \text{مف وا} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ی}} \text{مف ی} \quad \text{...} (19)$$

بالاخصار -

۵۸ - چھوٹی تصحیحات میں استعمال -

دفعہ ۵۵ کی طرح دفعہ ماقبل کا مسئلہ چھوٹی خطاؤں کے محسوب کرنے میں استعمال ہو سکتا ہے -

مثال ۱ - دفعہ ۵۵ مثال ۳ کی صورت میں اگر دو اضلاع اور درمیانی زاویہ میں خطائیں بالترتیب مف ا، مف ب، مف ج ہوں تو ج میں کل خطا [illegible] مساوات سے حاصل ہوگی

مف (ج) = جف (ج) / جف ا مف ا - جف ج / جف ب مف ب - جف ا ج / جب ج مف ج

(۱) . . . . . .

اس سے حاصل ہوتا ہے

ج مف ج = (ا - ب جم ج) مف ا + (ب - ا جم ج) مف ب - ا ب جب ج مف ج

یا مف ج = جم ب مف ا + جم ا مف ب - ا جب ب مف ج . . (۲)

مثال ۲ - مثلث کا رقبہ △ دو اضلاع ا ب اور درمیانی زاویہ ج کی بنا پر دریافت کیا گیا -

△ = ½ ا ب جب ج . . . . (۳)

لوک △ = لوک ½ + لوک ا + لوک ب + لوک جب ج . . . . . (۴)

تفرق کرنے سے مف △ / △ = مف ا / ا - مف ب / ب - جم ج مف ج . . (۵)

اس سے تناسبی خطا معلوم ہوگی یعنی خطا مف △ کو جو نسبت [illegible] [illegible] وہ معلوم ہوتی ہے - تمام پیمائشوں میں غلطی [illegible] [illegible] معلوم ہوتا یہ ضروری ہے [illegible] جیسا کہ تناسبی غلطی کا -

دفعہ [illegible] [illegible] سے ایک [illegible] پیدا ہوتا ہے [illegible] علقوں کے [illegible] سے کسی تعداد [illegible] چھوٹی تصحیح [illegible] ہوں تو انہیں ایک ساتھ [illegible] کیا جا سکتا ہے [illegible] اس امر [illegible] [illegible] [illegible] مف [illegible] مف [illegible] [illegible]

[illegible] -

مثلاً جب زاویہ [illegible] [illegible] خود کے [illegible] کی وجہ سے [illegible] کے بازؤں کے نا مساوی ہونے کی وجہ سے جو خطائیں پیدا ہوتی ہیں انہیں منسوب کر کے جبری طور پر جمع کر لیا جا سکتا ہے - ایسے کل میں دو [illegible] [illegible]

۵۹ — تفاعلوں کے تفاعل کا تفرق — تضمینی تفاعل کا تفرق —

دفعہ ۵۵ ضابطہ (۱۱) کا ایک مشہور استعمال یہ ہے کہ اس کی رو سے تفاعلوں کے تفاعل اور تضمینی تفاعل کا تفرق عمل میں آسکتا ہے۔

(أ) اگر $\text{ع} = \text{فہ}(\text{لا}, \text{ما})$ .... (۱)

جہاں لا، ما ایک متغیر ت کے معلوم تفاعل ہیں تو آخرالامر

$$\frac{\text{مف ع}}{\text{مف ت}} = \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}}\cdot\frac{\text{مف لا}}{\text{مف ت}} + \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}}\cdot\frac{\text{مف ما}}{\text{مف ت}} \quad \ldots\ldots (۲)$$

یا

$$\frac{\text{فر ع}}{\text{فر ت}} = \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}}\cdot\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}} + \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}}\cdot\frac{\text{فر ما}}{\text{فر ت}} \quad \ldots\ldots (۳)$$

۱۱۷ اس نتیجہ کو استعمال کرنے سے باب دوم کے کئی نتیجے حاصل ہو سکتے ہیں یا پہلی ترقیم کے موافق ہم لکھ سکتے ہیں

$$\text{ما} = \text{فہ}(\text{ع}, \text{و})$$

جہاں ع اور و، لا کے معلوم تفاعل ہیں۔ ضابطہ (۳) اس طرح ہو جاتا ہے

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ع}}\cdot\frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} + \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف و}}\cdot\frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}} \quad \ldots\ldots (۴)$$

مثلاً اگر $\text{فہ}(\text{ع}, \text{و}) = \text{ع و}$ .... (۵)

تو $\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ع}} = \text{و}$، $\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف و}} = \text{ع}$ اور $\frac{\text{فر}(\text{ع و})}{\text{فر لا}} = \text{و}\frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} + \text{ع}\frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}}$ ......(۶)

جو دفعہ ۴۴ کے مطابق ہے۔

ب۔ اگر $\text{فہ}(\text{ع}, \text{و}) = \text{ع}^{\text{و}}$ .... (۷)

تو $\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ع}} = \text{و ع}^{\text{و}-۱}$، $\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف و}} = \text{ع}^{\text{و}}\ \text{لوک ع}$، دفعات ۴۲، ۴۸ کی رو سے

اس لئے $\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}(\text{ع}^{\text{و}}) = \text{و ع}^{\text{و}-۱}\frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} + \text{ع}^{\text{و}}\ \text{لوک ع}\ \frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}}$ ......(۸)

جو دفعہ ۵۴ (۲) کے مطابق ہے۔

(۲) اگر ما، لا کا تضمینی تفاعل ہو جس کی تعیین اس مساوات سے ہوتی ہے

فہ (لا، ما) = ۰ .... (۹)

تو اس مساوات کو لحاظ لا کے تفرق کرنے سے

$$\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}}\ \frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}} + \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}}\ \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۰$$

یا

$$\frac{\text{جف فہ}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف فہ}}{\text{جف ما}}\ \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۰ \ \ldots\ldots\ldots\ldots (۱۰)$$

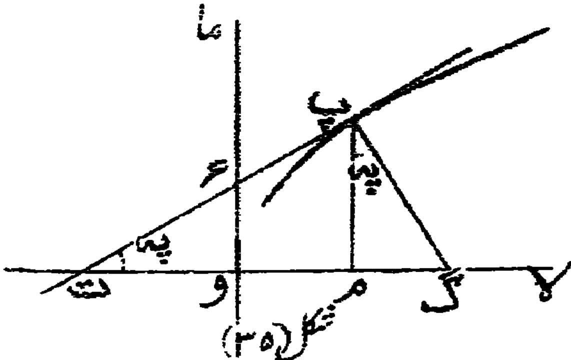
یہ دفعہ (۳۵) کے نتیجہ کی توسیع ہے۔

۶۰ ۔ مشتق تفاعلوں کے ہندسی استعمال ۔ کارتیزی محدد۔

دفعہ ۳۴ میں ہم نے دیکھا ہے کہ اگر ہم اس زاویہ کو پہ سے تعبیر کریں جو منحنی ما = فہ (لا) ..... (۱) کے کسی نقطہ پر کا ماس (اس کی داہنی جانب کی سمت) محور لا کی مثبت سمت کے ساتھ بناتا ہے تو

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{مس پہ} \ \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

اس ضابطہ کی مدد سے منحنی کے متعلق کئی مقداریں لا، ما اور $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کی رقوم میں بیان ہو سکتی ہیں



شکل (۳۵)

اگر نقطہ پ پر کے مماس اور عماد محور لا سے بالترتیب ت اور گ پر ملیں اور معین کا پایہ م ہو تو ت م کو "زیر مماس" اور م گ کو "زیر عماد" کہینگے۔

زیر مماس ت م = م پ مم پہ = ما ÷ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ .... (۳)

زیر عماد م گ = م پ مس پہ = ما $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ .... (۴)

مماس = ت پ = م پ قم پہ = ما $\left\{ ۱ + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^{۲} \right\}^{\frac{۱}{۲}}$ ÷ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ ... (۵)

عماد = پ گ = م پ قط پہ = ما $\left\{ ۱ + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^{۲} \right\}^{\frac{۱}{۲}}$ .... (۶)

نیز مماس کے مقطوعے محددوں کے محوروں پر ہیں

و ت = و م − ت م = لا − $\frac{\text{ما}}{\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}}$

و ع = ت و مس پہ = ما − لا $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ .... (۷)

مثال ۱۔ مکافی ما^{۲} = ۴ ار لا .... (۸)

میں طرفین کو بلحاظ لا کے تفرق کرنے اور ۲ پر تقسیم کرنے سے

ما $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ = ۲ ار .... (۹)

جس سے حاصل ہوتا ہے کہ زیر عماد مستقل ہے اور طول میں ۲ ار کے مساوی ہے۔

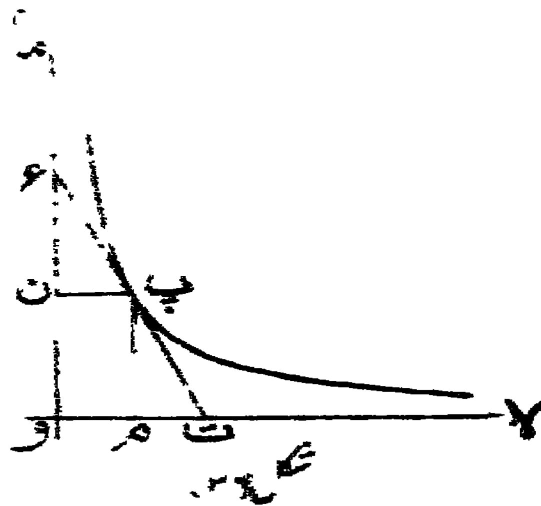
نیز زیر مماس ہے ما ÷ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ = $\frac{\text{ما}^{۲}}{۲\ \text{ار}}$ = ۲ لا .... (۱۰)

اور اس لئے پر منصف کا گیا ہے۔ دوسرے الفاظ میں مبدأ و ت م کی تنصیف کرتا ہے

مثال ۲۔ زائد لا ما = ک^{۲} .... (۱۱)

تب لا $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ + ما = ۰ .... (۱۲)

یعنی جدول ... سے مماس کے نقطے محوروں کے ... بہ ترتیب ۲لا ، ۲ما حاصل ہوتے ہیں۔ اس لئے م ... وت کی تنصیف ... ت پ ع کی تنصیف ... ہے۔ یعنی مماس کا جو حصہ محوروں کے ... ہے اسکی نقطۂ تماس پر تنصیف ہوتی ہے۔



شکل ۲۲

ان محوروں کا حاصل ضرب ۲لا ما یا ۲ک ہے ... مثلث وتع کا رقبہ مستقل ہے اور ۲ک کے مساوی ہے۔

مثال ۳ — زائدہ عام ... لا^م ما^ن = مستقل .... (۱۳)

دونوں طرف کے لوگارثم لینے اور تفرق کرنے سے

$\frac{\text{م}}{\text{لا}}$ + $\frac{\text{ن}}{\text{ما}}$ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ = ۰ .... (۱۴)

پس ت ب وت = لا − ما / $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ = لا + $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$ لا = $\frac{\text{م+ن}}{\text{ن}}$ لا

اسلئے　ع پ : پ ت = و مر : و ت = لا : ن/م لا = م : ن ....(۱۵)

یعنی مماس ت ت کی نقطۂ تماس پر مستقل نسبت سے تقسیم ہوتی ہے۔

اوپر کی دو صورتیں اس کے اندر شامل ہیں، جو مکافی ہیں (مثال ۱) م = -۱، ن = ۲، زائدیں (مثال ۲) م = ن = ۱

اس کی ایک ضروری طبیعی مثال یہ ہے۔ گیس کے حجم اور دباؤ میں "حجر ناگذار" رشتہ ہے　اس مساوات سے بیان ہوتا ہے　د ح^جما = مستقل ..... (۱۶)

اگر ح کو فصلہ اور د کو معین مان کر منحنی بنایا جائے تو مماس کی نقطہ تماس پر نسبت جما : ۱ سے تقسیم ہوتی ہے۔

مثال ۴ - ناقص　$\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ .... (۱۷)

تفرق سے　$\frac{لا}{ا^2} + \frac{ما}{ب^2} \frac{وما}{ولا} = ۰$ جس سے $\frac{وما}{ولا} = - \frac{ب^2}{ا^2} \frac{لا}{ما}$ .....(۱۸)

مماس کا مقطوعہ محور لا پر ت = $لا - ما \Big/ \frac{وما}{ولا} = لا + \frac{ا^2}{لا} \frac{ما^2}{ب^2}$

$= لا + \frac{ا^2}{لا} \left(۱ - \frac{لا^2}{ا^2}\right) = \frac{ا^2}{لا}$

جس سے　و مر × و ت = $ا^2$ .... (۱۹)

عماد کا مقطوعہ　و گ = $لا + ما \frac{وما}{ولا} = \left(۱ - \frac{ب^2}{ا^2}\right) لا = ز^2 \times$ و مر ...(۲۰)

جہاں ز خروج المرکز ہے۔

۹۱ - ایک متبدل کی رقوم میں محدود۔

بعض اوقات ایک منحنی اس نمونہ کی دو مساواتوں

لا = فہ(ت)، ما = خہ(ت)؛ .... (۱)

کے ذریعہ متعین ہو سکتا ہے جہاں محدد ایک ذیلی متغیر کی رقوم میں بیان کئے گئے ہیں۔

مثلاً حرکیات میں متحرک نقطہ کے محدد وقت کے تفاعلوں کے طور پر معلوم ہوتے ہیں۔

اگر ت کی قیمتوں کا کوئی موزوں سلسلہ لیا جائے تو اس سے لا، ما کی متناظر قیمتیں حاصل ہو سکتی ہیں، اس طرح منحنی پر اتنے نقطے مرتسم ہو سکتے ہیں جتنے ہم چاہیں۔

اگر لا، ما، ت کے ایک ساتھ کے اضافے مف لا، مف ما، مف ت ہوں تو

$$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \frac{\text{مف ما}}{\text{مف ت}} \div \frac{\text{مف لا}}{\text{مف ت}}$$ اس لئے انتہا میں

$$\text{مس پہ} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر ت}} \div \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

مثال ۱۔ ناقص میں $\text{لا} = \text{ا جم فہ}،\ \text{ما} = \text{ب جب فہ} \quad \ldots\ldots (3)$

$$\text{مس پہ} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر فہ}} \Big/ \frac{\text{فر لا}}{\text{فر فہ}} = -\frac{\text{ب}}{\text{ا}}\ \text{مم فہ} \quad \ldots\ldots (4)$$

مثال ۲۔ اگر جاذبہ ارض کے ماتحت کوئی شئے حرکت کر رہی ہو تو

$$\text{لا} = \text{ا} + \text{ع ت}،\ \text{ما} = \text{ب} + \text{و ت} - \tfrac{1}{2}\text{ج ت}^2 \quad \ldots\ldots (5)$$

جس سے $\text{مس پہ} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر ت}} \Big/ \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}} = \frac{\text{و} - \text{ج ت}}{\text{ع}}$

۶۲۔ منحنی کے کسی نقطہ پر مماس اور عماد کی مساواتیں۔

(ا) منحنی $\text{ما} = \text{فہ}(\text{لا}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

پر دو نقطے پ (لا، ما) اور ق (لا + مف لا، ما + مف ما) ہیں، خط پ ق پر کسی اور نقطے کے محدد (ظا، یہ) ہیں جو ذیل کے رشتہ کو پورا کرتے ہیں

$$\frac{ظ - لا}{مف لا} = \frac{یہ - ما}{مف ما} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۲)$$

$$یہ - ما = \frac{مف ما}{مف لا}(ظ - لا) \quad \ldots\ldots (۳)$$ شکل ۱۹ صفحہ ۱۶۲

انتہا میں جب ق، پ کے پاس آجائے تو اس مساوات کی یہ شکل ہو جاتی ہے

$$یہ - ما = \frac{فر ما}{فر لا}(ظ - لا) \quad \ldots\ldots (۴)$$

جو نقطہ پ پر کے مماسی خط کی مساوات ہے۔

چونکہ عماد کا ڈھال مماس کے ڈھال کا اُولٹا اور علامت میں مختلف ہوتا ہے اس لئے عماد کی مساوات ہے

$$(ظ - لا) + (یہ - ما)\frac{فر ما}{فر لا} = ۰ \quad \ldots\ldots (۵)$$

(۲) اگر محدد اس شکل میں ہوں

$$لا = فہ(ت)،\ ما = خہ(ت) \quad \ldots\ldots (۶)$$

تو (۲) کی رو سے قاطع پ ق پر

$$\frac{ظ - لا}{مف لا / مف ت} = \frac{یہ - ما}{مف ما / مف ت} \quad \ldots\ldots (۷)$$

اس لئے پ پر کے مماس کی مساوات ہے

$$\frac{ظ - لا}{\frac{فر لا}{فر ت}} = \frac{یہ - ما}{\frac{فر ما}{فر ت}} \quad \ldots\ldots\ldots (۸)$$

عماد کی مساوات بآسانی حاصل ہوتی ہے

$$(ظ - لا)\frac{فر لا}{فر ت} + (یہ - ما)\frac{فر ما}{فر ت} = ۰ \quad \ldots\ldots (۹)$$

(۳) اگر منحنی کی مساوات اس شکل　فہ (لا، ما) = ۰　　　$\ldots\ldots (۱۰)$

میں معلوم ہوا تو دفعات ۳۵، ۵۹ کی رو سے

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = -\frac{\text{جف فما}}{\text{جف لا}} \Big/ \frac{\text{جف فما}}{\text{جف ما}} \qquad \ldots\ldots (۱۱)$$

اس لئے مماس کی مساوات ہے

$$(\text{ظما} - \text{لا})\frac{\text{جف فما}}{\text{جف لا}} + (\text{یما} - \text{ما})\frac{\text{جف فما}}{\text{جف ما}} = \cdot \qquad \ldots (۱۲)$$

یہ اس امر سے بھی ظاہر ہے کہ منحنی پر پ کے چھوٹے ہٹاؤ کے لئے

$$\text{مف فما} = \text{یا} \frac{\text{جف فما}}{\text{جف لا}}\text{مف لا} + \frac{\text{جف فما}}{\text{جف ما}}\text{مف ما} = \cdot \qquad (۱۳)$$

(۲) کی رو سے مف لا : مف ما = ظما - لا : یما - ما .... (۱۴)

اس لئے نتیجہ (۱۲) حاصل ہو جاتا ہے۔

عماد کی مساوات ہے

$$\frac{\text{ظما} - \text{لا}}{\frac{\text{جف فما}}{\text{جف لا}}} = \frac{\text{یما} - \text{ما}}{\frac{\text{جف فما}}{\text{جف ما}}} \qquad \ldots\ldots (۱۵)$$

مثال ۱ - مکافی ما² = ۴ ار لا .... (۱۶) میں $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{۲\,\text{ار}}{\text{ما}}$ .... (۱۷)

مماس کی مساوات ہے یما - ما = $\frac{۲\,\text{ار}}{\text{ما}}$(ظما - لا) ...... (۱۸)

جو (۱۶) کی رو سے معمولی شکل میں آتی ہے ما یما = ۲ ار (ظما + لا) .... (۱۹)

مثال ۲ - اگر محدد اس شکل میں دیئے گئے ہوں لا = ار ت²، ما = ۲ ار ت ...(۲۰)

تو ضابطہ (۸) سے مماس ملتا ہے $\frac{\text{ظما} - \text{لا}}{\text{ت}}$ = یما - ما ...... (۲۱)

اور اس کی مزید تحویل اس شکل میں ہوتی ہے

$$\text{یما} = \frac{\text{ظما}}{\text{ت}} + \text{ار ت} \qquad \ldots\ldots\ldots (۲۲)$$

۱۱

عماد کی مساوات ہے (ظہ - لا) ت + (یہ - ما) = ۰ ..... (۲۳)

یا ت ظہ + یہ = ا ت۲ + ۲ ا ت .... (۲۴)

چونکہ ت اس میں تیسرے درجہ کی مساوات ہے اسلئے کسی اختیاری نقطہ (ظہ، یہ) سے تین حقیقی یا خیالی عماد کھینچ سکتے ہیں۔

مثال ۳۔ مرکز دار مخروطی ا لا۲ + ۲ ھ لا ما + ب ما۲ = ۱ ...... (۲۵)

کے کسی نقطہ پر مماس کی مساوات (۱۲) کی رو سے یہ ہے:

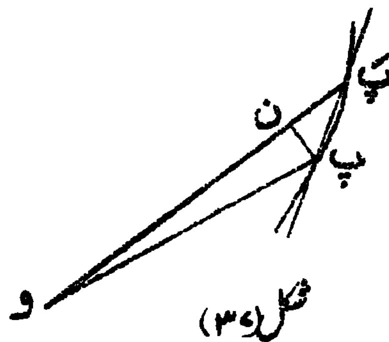
(ظہ - لا) (ا لا + ھ ما) + (یہ - ما) (ھ لا + ب ما) = ۰ (۲۶)

یا (ا لا + ھ ما) ظہ + (ھ لا + ب ما) یہ = ۱ .... (۲۷)

۶۳۔ قطبی محدد۔ فرض کرو کہ منحنی پر دو پاس کے نقطے پ، پَ ہیں اور پ کے قطبی محدد (ر، ظہ) اور پَ کے (ر + مف ر، ظہ + مف ظہ) ہیں، پ پَ کو ملاؤ اور و پَ پر عمود پ ن نکالو تو

پ ن = و پ جب پ و ن = ر جب مف ط

پَ ن = و پَ - و ن = ر + مف ر - ر جم مف ظہ = مف ر + ر (۱ - جم مف ظہ)



شکل (۳۷)

جب مف ظہ لاانتہا کم ہو تو جب مف ظہ کی نسبت مف ظہ کے ساتھ انتہا میں ایک ہو جاتی ہے اور ۱ - جم مف ظہ = ۲ جب۲ $\frac{\text{مف ظہ}}{۲}$

دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقدار ہے۔ اس لیے ہم لکھ سکتے ہیں

$$\text{مس پ پَ و} = \frac{\text{پ ن}}{\text{پَ ن}} = \frac{\text{رمفا طہ}}{\text{مفا ر}} + \text{ثہ} \quad \ldots\ldots(1)$$

جہاں ثہ ایک مقدار ہے جس کی انتہائی قیمت صفر ہے۔ پس جب پَ، پ پر منطبق ہو اور فہ وہ زاویہ ہو جو منحنی کے نقطہ پ پر کا مماس (جسے طہ کے بڑھنے کی سمت میں کھینچا جائے) سمتی نیم قطر کی مثبت سمت کے ساتھ بناتا ہے تو

$$\text{مس فہ} = \frac{\text{رفطہ}}{\text{فر}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)^{*}$$

یہاں طہ کو ر کا تفاعل خیال کیا گیا ہے۔ اگر ر کو طہ کا تفاعل خیال کیا جائے تو ضابطہ ہوگا

$$\text{مم فہ} = \frac{1}{\text{ر}}\,\frac{\text{فر}}{\text{فطہ}} \quad \ldots\ldots\ldots(3)$$

مثال ۱۔ دائرہ میں ر = ۲ ا جب طہ ....(4)

$$\text{لوک ر} = \text{لوک ۲ ا} + \text{لوک جب طہ}$$

---

* ذیل کا استدلال جو دفعہ ۲۳ کے اصول کا اطلاق ہے اس طور پر بڑھایا جا سکتا ہے

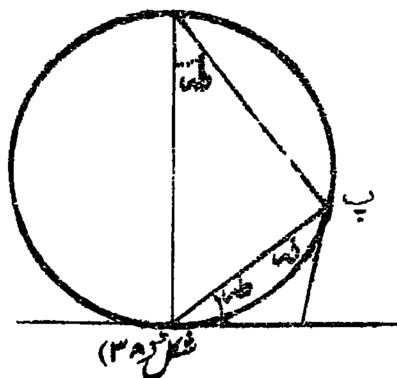
ٹھیک طور پر

$$\text{مس پ پَ و} = \frac{\text{رجب مفا طہ}}{\text{مفا ر} + \text{۲ ر جب}^2 \frac{\text{مفا طہ}}{2}}$$

$$= \frac{\text{ر} \frac{\text{مفا طہ}}{\text{مفا ر}} \times \frac{\text{جب مفا طہ}}{\text{مفا طہ}}}{1 + \text{ر} \frac{\text{مفا طہ}}{\text{مفا ر}} \times \frac{\text{جب} \frac{\text{مفا طہ}}{2}}{\frac{1}{2}\text{مفا طہ}} \times \text{جب مفا} \frac{\text{طہ}}{2}}$$

اور اس جملہ کی انتہائی قیمت $\frac{\text{رفطہ}}{\text{فر}}$ ہے۔

اور اس لئے $\frac{1}{ر}$ $\frac{فر}{فرطہ}$ = ہم طہ جس سے ہم فہ = ہم طہ یا فہ = طہ
(۵)......



شکل نمبر (۳۸)

۱۲۵

مثال ۲ ۔ جب ایک منحنی کا سمتی نیم قطر اعظم یا اقل ہو تو یہ منحنی کا عماد ہوتا ہے کیونکہ اگر

$\frac{فر}{فرطہ}$ = ۰ تو ہم فہ = ۰ یا فہ = $\frac{\pi}{۲}$

مثال ۳ ۔ اگر ایک منحنی کے عماد سب ایک ثابت نقطہ میں سے گذریں تو منحنی کو لازماً دائرہ ہونا چاہئیے ۔

اگر ثابت نقطہ کو قطب لیا جائے تو مفروض کی رو سے فہ = $\frac{\pi}{۲}$ اور اس لئے

$\frac{فر}{فرطہ}$ = ۰، طہ کی تمام قیمتوں کے لئے ۔ اس لئے ر = مستقل ۔

امثلہ ۱۵

۱ ۔ دفعہ ۹۴ کے مسئلہ کی ذیل کی صورتوں میں تصدیق کرو ۔

(۱) فہ(لا) = (لا ۔ ا)^م (لا ۔ ب)^ن

(۲) فہ(لا) = لوک $\frac{لا^۲ + اب}{(ا + ب) لا}$

(۳) فہ(لا) = $\frac{(لا ۔ ا)(لا ۔ ب)}{لا^۲}$

۲ — ثابت کرو کہ منحنی $\text{ما} = \text{لا}^{۴} - ۶\,\text{لا}^{۳} + ۹\,\text{لا}^{۲} + ۴\,\text{لا} - ۱۲$ اور

$$\text{ما} = \text{لا}^{۴} - \text{لا}^{۳} - ۳\,\text{لا}^{۲} + ۵\,\text{لا} - ۲$$

محور لا کو مس کرتے ہیں اور معلوم کرو کہ ان ... نقطے ہیں منحنیات کو ترسیم کرو۔

۳ — جب لا بڑھتے بڑھتے $\text{فا}(\text{لا}) = ۰$ کی کسی ایک اصل میں سے گذرے تو ثابت کرو کہ گذرنے سے عین پہلے $\text{فا}(\text{لا})$ اور $\text{فا}'(\text{لا})$ کی مختلف علامتیں ہونگی اور گذرنے کے عین بعد ایک ہی علامت۔ کیا دوہری اصل کی صورت میں بھی یہ درست ہے؟

۴ — اگر ا > لا > کیلئے $\text{فا}(\text{لا}) = \frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ا}} - \text{ا}$

اور لا > ا کیلئے $\text{فا}(\text{لا}) = \text{ا} - \frac{\text{ا}^{۳}}{\text{لا}^{۲}}$

لیکن لا = ا کیلئے $\text{فا}(\text{لا}) = ۰$

تو ثابت کرو کہ $\text{فا}(\text{لا})$، $\text{فا}'(\text{لا})$ دونوں مسلسل ہیں لا = ۰ سے لا = ∞ تک۔
منحنی $\text{ما} = \text{فا}(\text{لا})$ کو مرتسم کرو۔

۵ — مساوات $\text{لا}^{۳} - ۱۲\,\text{لا} + ۱۶ = ۰$ کا دوہری اصلوں کے لئے معائنہ کرو۔ بائیں طرف کی ترسیم کا حصہ کھینچو۔

۶ — ثابت کرو کہ منحنی $\text{ما} = ۸\,\text{لا}^{۳} - ۴۴\,\text{لا}^{۲} + ۷۸\,\text{لا} - ۴۵$ محور لا کو مس کرتا ہے اور دیکھو کہ یہ اسکو کہاں کاٹتا ہے۔ نیز معلوم کرو کہ کہاں پر منحنی کا مماس خط $۲\,\text{لا} + \text{ما} = ۰$ کے متوازی ہے۔ منحنی کا خاکہ کھینچو۔

۷ — سروں ا، ب، ج، د کو معلوم کرو کہ منحنی

$$\text{ما} = \text{ا}\,\text{لا}^{۳} + \text{ب}\,\text{لا}^{۲} + \text{ج}\,\text{لا} + \text{د}$$

نقطہ (−۲، ۸) میں سے گذرے، محور لا کو نقطہ (۲، ۰) پر مس کرے اور اس نقطہ پر جہاں لا = −۱ اس کا مماس محور لا کے متوازی ہو۔

۸ — ثابت کرو کہ جملہ $(\text{لا} - ۱)\,\text{ق}^{\text{لا}} + ۱$، لا کی تمام مثبت قیمتوں کے لئے مثبت ہے۔

۹۔ ثابت کرو کہ جب لا، $لا - \frac{لا^{۳}}{۶}$ اور $لا - \frac{لا^{۳}}{۶} + \frac{لا^{۵}}{۱۲۰}$ کے درمیان واقع ہوتا ہے اور جم لا، $۱ - \frac{لا^{۲}}{۲}$ اور $۱ - \frac{لا^{۲}}{۲} + \frac{لا^{۴}}{۲۴}$ کے درمیان۔

۱۰۔ ثابت کرو کہ اگر $لا^{۲} < ۱$ تو لوک $(۱ + لا)$، $لا - \frac{لا^{۲}}{۲}$ اور $لا - \frac{لا^{۲}}{۲} + \frac{لا^{۳}}{۳}$ کے درمیان واقع ہوتا ہے۔

۱۱۔ ثابت کرو کہ اگر $لا^{۲} < ۱$ تو مس$^{-۱}$ لا، $لا - \frac{لا^{۳}}{۳}$ اور $لا - \frac{لا^{۳}}{۳} + \frac{لا^{۵}}{۵}$ کے درمیان واقع ہوتا ہے۔

امثلہ ۱۶

(اعظم اور اقل قیمتیں)

۱۔ ثابت کرو کہ نقطہ کی مستقیم حرکت میں رفتار زیادہ سے زیادہ یا کم سے کم ہوگی جبکہ اسراع علامت بدلے۔
سادہ موسیقی حرکت س = ا جم ن ت سے اسکی توضیح کرو۔

۲۔ تفاعل $لا^{۴} - ۸ لا^{۳} + ۲۲ لا^{۲} - ۲۴ لا + ۱۲$ کی اعظم/اقل قیمتیں دریافت کرو۔

۳۔ ثابت کرو کہ تفاعل $۲ لا^{۳} - ۳ لا^{۲} - ۳۶ لا + ۱۰$ اعظم ہے جبکہ $لا = -۲$ اور اقل ہے جبکہ $لا = ۳$۔

۴۔ تفاعل $۴ لا^{۳} - ۱۸ لا^{۲} + ۲۷ لا - ۷$ کی کوئی اعظم/اقل قیمتیں نہیں۔

۵۔ تفاعل $لا^{۵} - ۵ لا^{۴} + ۵ لا^{۳} + ۱$ کے اصل نقطے دریافت کرو اور اس کا معائنہ کرو کہ تفاعل کن کے لئے اعظم یا اقل ہے۔

۶ — ثابت کرو کہ تفاعل $10x^6 - 12x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 20$ اقل ہے جبکہ $x = 1$ اور اس کے کوئی اور اعظم اور اقل نہیں ہیں۔

۷ — اس کا معائنہ کرو کہ مساوات $x^5 - x^3 - 4x^2 - 3x - 2$ کی کوئی مضعف اصل ہے۔ بائیں جانب کے حصہ پر تفاعل کے اصل نقطے معلوم کرو اور اس کی ترسیم بناؤ۔

۸ — ثابت کرو کہ منحنی $y = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4$، x کے محور کو دو نقطوں پر مس کرتا ہے اور اس کا اعظم معین دریافت کرو۔ منحنی کا خاکہ کھینچو۔

۹ — ثابت کرو کہ تفاعل $x\sqrt{ax - x^2}$ اعظم ہے جبکہ $x = \frac{3}{4}a$۔

۱۰ — ثابت کرو کہ تفاعل $\frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$ کی اعظم قیمت ہے $\frac{2}{27}$ اور اقل قیمت ہے صفر۔

۱۱ — ثابت کرو کہ جملہ $\frac{1 + x + x^2}{1 - x + x^2}$ کی اعظم قیمت ہے ۳ اور اقل قیمت ہے $\frac{1}{3}$۔

۱۲ — تفاعل $\frac{x(x^2+1)}{x^4 - x^2 + 1}$ کی اعظم قیمت ہے ۲ اور اقل قیمت ہے -2۔

۱۳ — تفاعل $\frac{x(x^2-1)}{x^4 - x^2 + 1}$ کی دو اعظم قیمتیں ہیں ہر ایک $= \frac{1}{2}$ اور دو اقل قیمتیں ہیں ہر ایک $= -\frac{1}{2}$۔

۱۴ — تفاعل $\frac{x^4 + 22x^2 + 9}{x(x^2 + 3)}$ کے اصل نقطے دریافت کرو اور اس کی ترسیم کھینچو۔

[اصل نقطے حاصل ہوتے ہیں مساواتوں $x^2 = 1, 3, 9$ سے]

۱۵ — $\frac{5x^2 - 18x + 45}{x^2 - 9}$ کے اصل نقطے دریافت کرو اور ترسیم کا خاکہ کھینچو۔

۱۶ — تفاعل $\frac{x}{(a+x)(b+x)}$ اعظم ہے جبکہ $x = \sqrt{ab}$ اور اقل ہے

جبکہ $لا = \sqrt{ا ب}$

۱۷ — ثابت کرو کہ تفاعل $م_۱ (لا - لا_۱)^۲ + م_۲ (لا - لا_۲)^۲ + \cdots + م_ن (لا - لا_ن)^۲$

اقل ہے جبکہ $لا = \frac{م_۱ لا_۱ + م_۲ لا_۲ + \cdots + م_ن لا_ن}{م_۱ + م_۲ + \cdots + م_ن}$

۱۸ — طول $لہ$ کی لہروں کی رفتار گہرے پانی پر $\sqrt{\frac{لہ}{ا} + \frac{ا}{لہ}}$ کے متناسب

ہے جہاں $ا$ ایک خاص خطی مقدار ہے۔ ثابت کرو کہ رفتار کم سے کم ہوگی جبکہ $لہ = ا$۔

۱۹ — دخانی جہاز کو پانی کے اندر دھکیلنے کے لئے جو قوت درکار ہوتی ہے وہ رفتار کے کعب کے موافق بدلتی ہے۔ ثابت کرو کہ رو کے خلاف نہایت کفایت کے ساتھ جہاز چلانے کی شرح وہ رفتار ہوگی جو رو کی رفتار کا $\frac{۳}{۲}$ اگنا ہو۔

۲۰ — دی ہوئی برقی رو کو ایک برقی اسٹیشن سے دوسرے تک تانبے کے تار کے ذریعہ لیجاتا ہے۔ ثابت کرو کہ کم سے کم لاگت وہ ۱۱ تار کا قطر وہ ہوگا جس سے کہ کل لاگت کا سود اس توانائی کی مقدار کے مساوی ہو جو تار کے گرم کرنے میں ضائع ہوتی ہے۔
[توانائی کے ضائع ہونے کی شرح عمودی تراش کے بالعکس متناسب ہے]

۲۱ — دخانی جہاز کے روزانہ اخراجات مزدوری کی اجرت، اصل کے سود اور کوئلہ پر مشتمل ہیں۔ کوئلہ کے خرچ کی شرح ایسے بدلتی ہے جیسے رفتار کا کعب۔ ثابت کرو کہ اگر سفر کو کم سے کم لاگت والی رفتار کے ساتھ طے کیا جائے تو کوئلہ کی لاگت، مزدوری کی مقدار اور سود کے نصف کے مساوی ہوگی۔

۲۲ — دو دخانی جہازوں میں سے ایک سیدھا ایک بندرگاہ کی طرف جارہا ہے دوسرا ٹھیک اس بندرگاہ سے باہر کو جارہا ہے، ان کے راستے ایک دوسرے سے زاویہ ۶۰° بناتے ہیں اور ان کی رفتاروں کی نسبت ۲ : ۱ ہے۔ ثابت کرو کہ ٹھیک اس آن میں جبکہ وہ ایک دوسرے کے قریب سے قریب ہوں بندرگاہ سے ان کے فاصلے نسبت ۴ : ۵ میں ہیں۔

۲۳ — نصف قطر $ا$ کے دائرہ میں برقی رو ہے، اسکی وجہ سے جو قوت ایک

چھوٹے مقناطیس پر جس کا محور دائرہ کے محور پر منطبق ہوتا ہے اثرانداز ہوتی ہے وہ ایسے بدلتی ہے جیسے $\frac{لا}{(ا^2 + لا^2)^{\frac{5}{2}}}$ جہاں لا مقناطیس کا فاصلہ ہے دائرہ کی مستوی سطح سے۔ ثابت کرو کہ قوت زیادہ سے زیادہ ہوگی جبکہ لا = $\frac{ا}{2}$ ۔

۲۴ — ثابت کرو کہ جملہ ا جم طہ + ب جب طہ کی انتہائی قیمتیں $\pm \sqrt{ا^2 + ب^2}$ ہیں۔

۲۵ — ثابت کرو کہ جب (طہ - عہ) جم (طہ - بہ) اعظم ہے یا اقل جبکہ

$$طہ = \frac{1}{2}(عہ + بہ) + \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2} ن \pi$$

اور ن بالترتیب جفت ہو یا طاق۔

۲۶ — رقاص کا میلان انتصابی خط کے ساتھ جبکہ ہوا کی مزاحمت کو ملحوظ رکھا جائے اس ضابطہ سے حاصل ہوتا ہے طہ = ا قو$^{-ک ت}$ جم (ن ت + ص)۔ ثابت کرو بڑے سے بڑا اہتزاز وقت کے مساوی وقفوں $\frac{\pi}{ن}$ کے بعد پیدا ہوتے ہیں اور ایک گھٹنے والا ہندسی سلسلہ بناتے ہیں۔

۲۷ — منحنی ما = لا قو^{لا} کا اعظم معین دریافت کرو۔ منحنی کو مرتسم کرو۔

۲۸ — منحنی ما = لا لوک لا کا اقل معین ...... ۰٫۳۶۷۸ ہے۔ منحنی کو مرتسم کرو

۲۹ — ثابت کرو کہ ایک عدد لا کے لوکارثم کی نسبت اس عدد کے ساتھ بڑی سے بڑی ہوتی ہے جبکہ لا = قو۔

۳۰ — ثابت کرو کہ اگر ا > ب تو جملہ ا جمز لا + ب جبز لا کی اقل قیمت $\sqrt{ا^2 - ب^2}$ ہے لیکن اگر ا < ب تو اس کی قیمت نہ اعظم ہوگی نہ اقل۔

۳۱ — ثابت کرو کہ تفاعل جمز لا + جم لا کی اقل قیمت ہوگی جبکہ لا = ۰۔ لیکن اور کوئی اقل یا اعظم قیمت نہیں ہوگی۔

۳۲ — ثابت کرو کہ تفاعل جمز لا جم لا کی اعظم قیمت ہوگی جبکہ لا = ۰، اقل

قیمت ہوگی جبکہ لا = $\frac{5}{4}$ ۳ تقریباً ۱، اور باری باری سے اعظم اور اقل قیمتوں کا ایک سلسلہ ہوگا جبکہ لا = ن ۳ + $\frac{1}{4}$ ۳ تقریباً جہاں ن = ۱، ۲، ۳ .....

۳۳ — تفاعل $\frac{\text{جمس لا} + \text{جم لا}}{1 + \text{جمس لا جم لا}}$ کی اعظم اقل قیمتیں دریافت کرو۔

۱۳۰

امثلہ ۱۷

ہندسی سوالات

۱ — دئے ہوئے رقبہ کے لئے کم سے کم محیط والا مستطیل مربع ہے۔

۲ — دئے ہوئے محیط والا مستطیل جس کا قطر چھوٹے سے چھوٹا ہو مربع ہے۔

۳ — بڑے سے بڑا مستطیل جو ایک دئے ہوئے مثلث میں بن سکتا ہے رقبہ میں مثلث کا آدھا ہوتا ہے۔

۴ — مثلث قائم الزاویہ کے اندر ایک مستطیل بنایا گیا ہے، اس کا ایک زاویہ، زاویہ قائمہ پر منطبق ہوتا ہے، ثابت کرو کہ اس کا رقبہ اعظم ہوگا جبکہ مقابل کا کونہ وتر کی تنصیف کرے۔ ثابت کرو کہ مذکورہ حالات کے ماتحت مستطیل کا محیط نہ تو اعظم ہوگا نہ اقل۔

۵ — بڑے سے بڑا یا کم سے کم محیط والا مستطیل معلوم کرو جو ایک دے ہوئے دائرے کے اندر بنایا جا سکتا ہے۔

۶ — دائرہ کے اندر ایک دئے ہوئے نقطہ ا میں سے ایک وتر پ ا ق کھینچا گیا ہے، ثابت کرو کہ حصوں پ ا اور ا ق کے مربعوں کا مجموعہ کم سے کم ہوتا ہے جبکہ وتر، ا میں سے گذرنے والے قطر پر عمود وار ہو اور زیادہ سے زیادہ ہوتا ہے جبکہ وتر قطر پر منطبق ہو۔

۷ — ایک ثابت خط مستقیم اور دو ثابت نقطے ا، ب خط کے باہر معلوم ہیں، خط کے اندر ایک ایسا نقطہ پ دریافت کرنا مطلوب ہے کہ $\text{ا پ}^2 + \text{پ ب}^2$ اقل ہو۔

۸ — کم سے کم رقبہ والا مربع دریافت کرو جو ایک دئے ہوئے مربع کے اندر بنایا جا سکتا ہے، اور بڑے سے بڑے رقبہ والا مربع دریافت کرو جو ایک دئے ہوئے مربع کے گرد بن سکتا ہے۔

۹ — ایک چار ضلعی ا پ ق ب قطعہ دائرہ کے اندر بنائی گئی ہے، ا ب قطعہ کا قاعدہ ہے۔ جب رقبہ زیادہ سے زیادہ ہو تو ثابت کرو کہ

ا پ = پ ق = ق ب

۱۰ — ایک خط مستقیم نقطہ (ا، ب) میں سے کھینچا گیا ہے اور محددوں کے (علی القوائم) محوروں کو بالترتیب پ اور ق پر ملتا ہے، ثابت کرو کہ و پ + و ق کی اقل قیمت $ا + ۲\sqrt{اب} + ب$ ہے۔

۱۱ — ایک خط مستقیم ثابت نقطہ (ا، ب) میں سے گذرتا ہے، ثابت کرو کہ کم سے کم طول جو محددوں کے محوروں کے درمیان قطع ہوتا ہے وہ $(ا^{\frac{۲}{۳}} + ب^{\frac{۲}{۳}})^{\frac{۳}{۲}}$ ہے۔

[محور علی القوائم]

۱۲ — دھات کی مستطیلی چادر کے کونوں سے چار مساوی مربعے نکال دئے گئے ہیں اور اضلاع کو اوپر موڑنے سے ایک کھلا مستطیلی صندوق بنایا گیا ہے، ثابت کرو کہ جب صندوق کے اندر کا حجم زیادہ سے زیادہ ہو تو اس کی گہرائی ہوگی

$\frac{۱}{۶}\left[ا + ب - \sqrt{ا^{۲} - اب + ب^{۲}}\right]$ جہاں ا، ب اصلی مستطیل کے اضلاع ہیں۔

۱۳ — ایک مکان کی دیوار پر ایک ۵ فٹ اونچی کھڑکی ہے اور اس کی دہلیز زمین سے ۱۰ فٹ کی اونچائی پر ہے۔ بتاؤ کہ ایک شخص جس کی آنکھ زمین سے ۵ فٹ اونچی ہے دیوار سے کتنے فاصلے پر کھڑا ہو کہ کھڑکی کے سامنے اس کی آنکھ پر بڑے سے بڑا انتصابی زاویہ بنے۔

۱۴ — درخت کے اسطوانی تنے سے مستطیلی تراش کا ایک شہتیر کاٹنا مقصود ہے جس کے جھکاؤ کی استواری زیادہ سے زیادہ ہو۔ ثابت کرو کہ تراش کا عرض قطر کا نصف ہونا چاہئے اور اس کی گہرائی قطر کی ۰٫۸۶۶ گنا ہونی چاہئے۔

(یہ مان لیا جائے کہ شہتیر کی استواری ایسے بدلتی ہے جیسے عرض اور گہرائی کا مکعب)

۱۵۔ ایک چراگاہ نہر کے کنارے کے ساتھ ساتھ ایک سیدھی سڑک ہے اور چراگاہ کے ایسے مقام پر ایک شخص ہے جو سڑک کے قریب ترین نقطہ سے ایک میل کے فاصلہ پر ہے۔ وہ کم سے کم وقت میں سڑک کے ایک دور کے مقام تک جانا چاہتا ہے اگر چراگاہ اور سڑک پر اس کے چلنے کی رفتاریں بالترتیب ۴ اور ۵ میل فی گھنٹہ ہوں تو ثابت کرو کہ اسے سڑک سے ایک ایسے مقام پر جا ملنا چاہیے جس کا فاصلہ ا سے $\frac{4}{3}$ میل ہے۔

۱۶۔ ایک کمرہ کی دیوار پر روشنی کا مبدا زمین سے کتنی اونچائی پر لگایا جائے کہ فرش کے ایسے نقطہ جس کا فاصلہ دیوار سے ا ہے روشنی کی چمک زیادہ سے زیادہ ہو۔ (یہ مان لیا جائے کہ کسی سطح پر روشنی کی چمک ایسے بدلتی ہے جیسے مبدا سے فاصلہ کے مربع کا عکس، نیز ایسے بدلتی ہے جیسے ان شعاعوں کے جیب التمام جو شعاعیں سطح کے عاد کے ساتھ بناتی ہیں)۔

۱۷۔ دو ذرے پ اور ق مستقل رفتاروں و، ع کے ساتھ دو ثابت سیدھے خطوں پر حرکت کرتے ہیں، یہ خط باہم و پر قطع کرتے ہیں اگر ایک ہی وقت میں ذروں کے مقامات ا اور ب ہوں اور اگر و ا = ا، و ب = ب اور > ا و ب = سہ تو فاصلہ پ ق کم سے کم ہوگا وقت

$$\frac{ا ع + ب و - (ا و + ب ع) \text{ جم } سہ}{ع^2 - ۲ ع و \text{ جم } سہ + و^2}$$

کے بعد اور کم سے کم فاصلہ ہوگا

$$\frac{(ا و - ب ع) \text{ جب } سہ}{(ع^2 - ۲ ع و \text{ جم } سہ + و^2)^{\frac{1}{2}}}$$

۱۸۔ ایک قطعہ مکافی ایک ایسے وتر سے گھرا ہوا ہے جو محور پر عمود وار ہے اس کے اندر بڑے سے بڑا مستطیل بنانا مقصود ہے ثابت کرو کہ اس کا طول قطعہ کے طول کا $\frac{2}{3}$ ہے۔

۱۹۔ بڑے سے بڑا مستطیل جو ایک قطع ناقص کے اندر بن سکتا ہے اس کے قطر مساوی مزدوج قطروں پر منطبق ہو سکتے ہیں۔

۲۰ — اگر ناقص کے مماس کا طول جو محوروں کے درمیان کٹتا ہے کم سے کم ہو تو مماس نقطہ تماس پر دو حصوں میں تقسیم ہوتی ہے جو بالترتیب ناقص کے نیم محوروں کے مساوی ہوتے ہیں۔

۲۱ — قطع ناقص کا مماس محرد صدری محوروں کے ساتھ تقاطع سے کم سے کم رقبہ والا مثلث پیدا کرتا ہے، ثابت کرو کہ یہ مماس ناقص کے مساوی مزدوج قطروں میں سے کسی ایک کے مساوی ہے۔

۲۲ — دائری قطاع کا محیط دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا رقبہ زیادہ سے زیادہ ہوگا جبکہ قطاع کا زاویہ ۲ نیم قطری ہو اور اس صورت میں رقبہ نیم قطر کے مربع کے مساوی ہوگا۔

۲۳ — ایک مثلث کا قاعدہ دیا ہوا ہے، اگر باقی دو اضلاع کا مجموعہ معلوم ہو تو رقبہ زیادہ سے زیادہ ہوگا جبکہ اضلاع مساوی ہوں۔

۲۴ — ایک چار ضلعی کے چاروں اضلاع ایک خاص ترتیب میں دئے گئے ہیں ثابت کرو کہ اسکا رقبہ زیادہ سے زیادہ ہوگا اگر یہ دائرہ کے اندر بن سکے۔

امثلہ ۱۸

[ذیل کے نتائج مان لئے جائیں۔

(۱) قائم دائری اسطوانہ کا نصف قطر ر اور ارتفاع ع ہے، اسکی منحنی سطح ۲ π ر ع ہوگی (۲) اس کا حجم π ر² ع ہوگا۔

(۳) قائم مستدیر مخروط کا ارتفاع ع اور قاعدہ کا نصف قطر ر اور مائل ضلع ل ہے۔ اس کی منحنی سطح π ر ل ہوگی (۴) اس کا حجم ⅓ π ر² ع ہوگا۔

(۵) کرہ نیم قطر ر، اسکی سطح ۴ π ر² ہوگی (۶) اس کرہ کا حجم ۴/۳ π ر³ ہوگا۔]

۱ — بڑے سے بڑے حجم کا اسطوانہ جو ایک دئے ہوئے کرہ کے اندر بنایا جا سکتا ہے کرہ کے حجم کا ۵۷۷۳ء گنا حجم رکھتا ہے۔

۲ — بڑے سے بڑے سطحی رقبہ والا اسطوانہ جو ایک دئے ہوئے کرہ کے اندر بنایا جا سکتا ہے اس کی سطح کرہ کی سطح کی ۹۰۹۰ء گنا ہوتی ہے۔

۳ — بڑے سے بڑے حجم والا اسطوانہ جس کا سطحی رقبہ دیا ہوا ہے وہ ہے جسکا

ارتفاع قاعدہ کے قطر کے مساوی ہو اور اس کا حجم اُس کرہ کے حجم کا ۱٫۸۱۵ گنا ہوتا ہے جس کا سطحی رقبہ وہی ہو۔

۴۔ دئے ہوئے حجم کے لئے کم سے کم سطح والا اسطوانہ دریافت کرو اور ثابت کرو کہ اسکی سطح کی نسبت مساوی حجم کے کرہ کی سطح کے ساتھ ۱٫۱۴۵ : ۱ ہے۔

۵۔ کھلے اسطوانی ظرف کے ابعاد کی نسبت معلوم کرو کہ دئے ہوئے حجم کے لئے اسکی بناوٹ میں مسالہ کی مقدار کم سے کم صرف ہو۔ [اس کا ارتفاع قاعدہ کے نصف قطر کے مساوی ہونا چاہئے۔]

۶۔ قائم مستدیر مخروط کے اندر ایک اسطوانہ بنایا گیا ہے اس کا حجم اعظم ہوگا جبکہ اس کا ارتفاع مخروط کے ارتفاع کا $\frac{1}{3}$ ہو اور اس کا حجم اُس وقت مخروط کے حجم کا $\frac{4}{9}$ ہوگا۔

۷۔ ایک اسطوانہ ایک قائم مستدیر مخروط کے اندر بنایا گیا ہے ثابت کرو کہ اس کی منحنی سطح اعظم ہوگی جبکہ اسطوانہ کا ارتفاع مخروط کے ارتفاع کا $\frac{1}{2}$ ہو۔
نیز ثابت کرو کہ اسطوانہ کی کل سطح کی اعظم قیمت نہیں ہوسکتی اگر مخروط کا نیم زاویہ ۲۶° ۳۴′ [= مس$^{-1}$ $\frac{1}{2}$] سے بڑا ہو۔

۸۔ دئے ہوئے کرہ کے اندر جو بڑے سے بڑے حجم والا مخروط بنایا جاسکتا ہے اس کا ارتفاع کرہ کے قطر کا $\frac{2}{3}$ ہوگا۔ نیز ثابت کرو کہ مخروط کی منحنی سطح ارتفاع کی اسی قیمت کے لئے اعظم ہوگی۔

۹۔ اگر ایک دئے ہوئے کرہ کے گرد قائم مستدیر مخروط بنایا جائے تو اس کا حجم کم سے کم ہوگا جبکہ اس کا ارتفاع کرہ کے قطر کا دگنا ہو۔ نیز ثابت کرو کہ نیم راسی زاویہ ۱۹° ۲۸′ [= جب$^{-1}$ $\frac{1}{3}$] ہوگا۔

۱۰۔ اگر قائم مستدیر مخروط کا حجم مستقل رکھا جائے تو سطح زیادہ سے زیادہ ہوگی جبکہ ارتفاع قاعدہ کے قطر کا $\sqrt{2}$ گنا ہو۔

۱۱۔ دھات کی گول چادر سے ایک قطاع دائرہ کاٹنا مقصود ہے کہ باقی حصہ سے ایک مخروطی ظرف بن سکے جس کی گنجائش زیادہ سے زیادہ ہو۔ ثابت کرو کہ قطاع کا زاویہ ۶۶° ہونا چاہئے۔

۱۲۔ کھلے مستطیلی تالاب میں پانی کا دیا ہوا حجم آسکنا چاہئے۔ بتاؤ کہ اسکے ابعاد کے

تناسب کیا ہوں کہ سیلہ سے اس کو منڈھوانے کے اخراجات کم سے کم ہوں۔
[طول اور عرض دونوں گہرائی کے دوچند ہونے چاہئیں]

۱۳ — مستطیلی متوازی السطوح کے تین متقاطع کناروں کا مجموعہ معلوم ہے۔ اس کی شکل دریافت کرو کہ سطح زیادہ سے زیادہ ہو۔

۱۴ — بڑے سے بڑے حجم والا مستطیلی متوازی السطوح جو ایک کرہ کے اندر بن سکتا ہے مکعب ہے۔

۱۵ — بڑے سے بڑے حجم والا مستطیلی متوازی السطوح جس کی بیرونی سطح معلوم ہو مکعب ہے۔

۱۶ — بند بیضوی منحنی میں بڑے سے بڑے رقبہ والا مثلث بنایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ راسوں پر کے مماس مقابل کے اضلاع کے متوازی ہیں۔

۱۷ — بند بیضوی منحنی کے گرد کم سے کم رقبہ والا مثلث بنایا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اضلاع کی نقاط تماس پر تنصیف ہوتی ہے۔

۱۸ — زیادہ سے زیادہ رقبہ والا مثلث جو ایک دائرہ کے اندر بن سکتا ہے وہ متساوی الاضلاع مثلث ہے، اور کم سے کم رقبہ والا مثلث جو دائرہ کے گرد بن سکتا ہے وہ بھی متساوی ضلعوں والا مثلث ہے۔

۱۹ — بڑے سے بڑے رقبہ والا کثیر الاضلاع جس کی تعداد اضلاع ن دی ہوئی ہو اور جو ایک دائرہ کے اندر بن سکے منتظم کثیر الاضلاع ہوگا۔ نیز ن اضلاع کا کم سے کم رقبہ والا کثیر الاضلاع جو ایک دائرہ کے گرد بن سکتا ہے وہ بھی منتظم کثیر الاضلاع ہے۔

۲۰ — یہ مان کر کہ معلوم گھیرے کے لئے بڑے سے بڑے رقبہ والا مستطیل مربع ہے، بتاؤ کہ اس سے فوراً یہ کس طور پر مستنبط ہوتا ہے کہ دیے ہوئے رقبہ کے لئے کم سے کم گھیرے والا مستطیل مربع ہے۔

اسی طور پر اوپر کے سوالات ۱۳ اور ۱۵ سے کیا نتائج اخذ ہو سکتے ہیں۔

۲۱ — ن اضلاع کا کثیر الاضلاع معلومہ گھیرے کے لئے جس کا رقبہ اعظم ہو یا معلومہ رقبہ کے لئے جس کا گھیرا اقل ہو منتظم کثیر الاضلاع ہوگا۔
[اشکلہ ۱۷، سوال ۲۴ کا نتیجہ مان لو]۔

اس سے ثابت کرو کہ معلومہ گھیرے کے لئے اعظم رقبہ کی شکل یا معلومہ رقبہ کے لئے اقل گھیرے کی شکل، دائرہ ہوگی۔

۲۲ — ٹپہ خانہ (پوسٹ آفس) کے قواعد کی رو سے پارسل کے طول اور گھیرے کا مجموعہ ۶ فٹ سے زیادہ نہیں ہونا چاہئے۔ ثابت کرو کہ بڑے سے بڑے حجم والا پارسل جو بھیجا جاسکتا ہے وہ ایک اسطوانہ ہے جو طول میں ۲ فٹ اور گھیرے میں ۴ فٹ ہو۔ اس کا حجم ۲٫۵۴۶ مکعب فٹ ہوگا۔

امثلہ ۱۹

چھوٹے تغیرات

۱ — ثابت کرو کہ لوکارتمی مماسوں کی جدول میں جو اساس ۱۰ پر محسوب کئے گئے ہوں 60° کی پڑوس میں ایک منٹ کے لئے فرق تقریباً ۰۰۰۲۹ء ہے۔

۲ — ایک برج کی بلندی ب اس کے پایہ سے فاصلہ ا پر زاویہ ارتفاع (عما) مشاہدہ کرنے سے معلوم کی گئی ہے، ثابت کرو کہ مشاہدہ شدہ ارتفاع میں خطا مف عما کے جواب میں خطا ہے

مف ب = ا قط^2 عما مف عما

اگر ا = ۱۰۰ فٹ، عما = 30° اور زاویہ میں خطا $1'$ ہو تو ثابت کرو کہ مف ب = ۴۷ء ۰ انچ۔

۳ — ۱۰۱ کا جذر الکعب دریافت کرو، یہ معلوم ہے کہ ۱۰۰ کا جذر الکعب ۴٫۶۴۲ ہے۔ (۴٫۶۵۷۰)

۴ — لوک$_{ھ}$ ۱۰ = ۲٫۳۰۲۶ معلوم ہے، لوک$_{ھ}$ ۱۰۱ کی تقریبی قیمت معلوم کرو۔
جواب :- (۴٫۶۱۵۱)

۵ — ضد لوکارتموں (حا = 10^{-1}) کی جدول میں ۴ء کے محاذی اندراج ۲٫۵۱۱۸۸۶ ہے، ۴۰۰۵ء کے ضد لوکارتم دریافت کرو۔ (مما = ۴۳۴۲۹۴ء)
جواب :- (۲٫۵۱۴۷۹)

۶ — لوک مماس سے ایک زاویہ دریافت کیا جائیگا۔ اگر لوک مماس کے

منسوب کرنے میں غلطی ۰۰۱. درجہ ہو گئی ہو تو قوسی سکنڈوں میں زاویہ کی خطا دریافت کرو جبکہ زاویہ ۳۰° ہے اور ڈگریوں میں ہے۔ [۲۰.۶]

۷۔ ایک قاطعوں کی جدول میں جو اساس ۱۰ پر محسوب کئے گئے ہیں ایک منٹ کے لئے فرق ۳۰° کی ڈگریوں میں تقریباً ...... ہوگا۔

۸۔ معلوم ہے جتم ۵ = ۲.۰۹۹، جتم ۵.۰۰۱ کی قیمت محسوب کرو۔

۹۔ مسنر ۵ = ۱۲.۲۲... مسنر ۵.۰۰۱ کی قیمت معلوم کرو۔

۱۰۔ اگر فما (لا) مسلسل اور قابل تفرق ہو سوائے قیمت لا = لا₁ پر جہاں یہ لامتناہی ہو جاتا ہے تو ثابت کرو کہ فماَ (لا₁) بھی لامتناہی ہوگا۔

۱۱۔ مماسی برق پیما میں سوئی کے انحراف کا مماس برقی رو کے متناسب ہوتا ہے ثابت کرو کہ قرأت کی ہلکی خطا کے جواب میں جو رو کی محصلہ قیمت میں متناسب خطا ہوگی وہ کم سے کم ہوگی جبکہ انحراف ۴۵° ہو۔

۱۲۔ ایک عدسہ کے محور پر ایک نقطہ اور اس کی تصویر یا خیال کے فاصلے عدسہ سے (لا، لاَ) ذیل کے رشتے سے مربوط ہیں $\frac{1}{لا} + \frac{1}{لاَ} = \frac{1}{ف}$،

ثابت کرو کہ کسی چھوٹی شئے کی طولی تضعیف $\left(\frac{لاَ}{لا}\right)^2$ ہے۔

۱۳۔ ایک کرینک وپ، و کے گرد زاوی رفتار سمہ کے ساتھ گھومتا ہے، ایک واصل سلاخ پ ق، پ پر وصل کردی گئی ہے اور ق ایک ثابت نالی و لا میں حرکت کرنے کے لئے مجبور ہے ثابت کرو کہ ق کی رفتار سمہ × و م ہے جہاں م ایسا نقطہ ہے جس پر خط ق پ (ممدودہ بشرط ضرورت) و میں سے گزرنے والے و لا پر عمودی خط سے ملتا ہے۔

۱۴۔ ایک جسم کی کثافت (س) ہوا اور پانی میں اسکے اوزان بالترتیب (و، وَ) سے حاصل کی گئی ہے، ثابت کرو کہ تولنے کی خطاؤں مف و، مف وَ کے جواب میں کثافت کی متناسب خطا ہوگی۔

$$\frac{مف\,س}{س} = -\frac{و}{ث-و}\times\frac{مف\,ث}{ث} + \frac{مف\,وَ}{و-وَ}$$

۱۵۔ ایک کرہ کا نیم قطر ر ہوا اور پانی میں تولنے سے نکالا گیا ہے، ثابت کرو کہ تولنے کی چھوٹی خطاؤں کی وجہ سے متناسب خطا ہوگی

$$\frac{\text{مف}\,ر}{ر} = \frac{\text{مف}\,و_۱ - \text{مف}\,و_۲}{۳\,(و_۱ - و_۲)}$$

جہاں $و_۱$، $و_۲$ بالترتیب ہوا اور پانی کے اندر وزن ہیں۔

۱۶۔ ناقص کے رقبہ (س) کی خطا جبکہ نیم محوروں ا، ب کے ناپنے میں چھوٹی خطائیں ہوں یہ ہوگی

$$\frac{\text{مف}\,س}{س} = \frac{\text{مف}\,ا}{ا} + \frac{\text{مف}\,ب}{ب}$$

۱۷۔ اگر مثلث کے تینوں اضلاع ا، ب، ج ناپے جائیں تو اضلاع کی پیمائش میں چھوٹی خطاؤں کی وجہ سے زاویہ ا کی خطا ہوگی

$$\text{مف}\,ا = \frac{\text{جب}\,ا}{\text{جب}\,ب\,\text{جب}\,ج}\left(\frac{\text{مف}\,ا}{ا} - \text{جم}\,ج\,\frac{\text{مف}\,ب}{ب} - \text{جم}\,ب\,\frac{\text{مف}\,ج}{ج}\right)$$

۱۸۔ ایک مثلث کا رقبہ ق اس کے ایک ضلع ا اور متصل زاویوں (ب، ج) کے ناپنے سے حاصل کیا گیا ہے، ثابت کرو کہ پیمائش کی چھوٹی خطاؤں کی وجہ سے رقبہ میں متناسب غلطی ہے

$$\frac{\text{مف}\,ق}{ق} = ۲\,\frac{\text{مف}\,ا}{ا} + \frac{ج}{ا}\,\frac{\text{مف}\,ب}{\text{جب}\,ب} + \frac{ب}{ا}\,\frac{\text{مف}\,ج}{\text{جب}\,ج}$$

اس نتیجہ کی ہندسی طور پر تصدیق کرو۔

۱۹۔ ایک مثلث کا رقبہ ق اس کے اضلاع کے طولوں ا، ب، ج سے محسوب کیا گیا ہے، اگر ایک ہی مقدار عما سے ا کو گھٹایا اور ب کو بڑھایا جاوے تو ثابت کرو کہ اسکی وجہ سے رقبہ میں تبدیلی ہوگی

$$\frac{\text{مف}\,ق}{ق} = \frac{۲\,(ا - ب)\,\text{عما}}{ج^۲ - (ا - ب)^۲}$$

۲۰ — ایک مثلث کا ارتفاع قاعدہ ا اور قاعدہ پر کے زاویوں ب، ج کو ناپنے سے محسوب کیا گیا ہے، اگر ناپنے میں خطائیں مف ب، مف ج ہوں تو ارتفاع میں متناسب خطا ہوگی

$$\frac{\text{جب ج}}{\text{جب ا جب ب}} \text{ مف ب} + \frac{\text{جب ب}}{\text{جب ا جب ج}} \text{ مف ج}$$

۲۱ — مثلث ا ب ج کو ذرا سا بدلا گیا ہے لیکن اس طور پر کہ یہ اسی پہلے دائرہ کے اندر بن سکتا ہے، ثابت کرو

$$\frac{\text{مف ا}}{\text{جم ا}} + \frac{\text{مف ب}}{\text{جم ب}} + \frac{\text{مف ج}}{\text{جم ج}} = \cdot$$

۲۲ — چار ڈنڈوں کے جوڑنے سے ا ب ج د ایک مستوی چار ضلعی شکل بنائی گئی ہے جس کی شکل بگڑ سکتی ہے۔ اگر قطروں ا ج، ب د کے طول لا، ما ہوں تو ان کے طولوں کے لاانتہا چھوٹے تغیرات ذیل کے ذریعہ مربوط ہونگے

جب ا جب ج لا مف لا + جب ب جب د ما مف ما = ۰

امثلہ ۲۰

ہندسی استعمال

۱ — اسکے لئے شرط کہ منحنی کا مماس مبدا میں سے گزرے یہ ہے $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ما}}{\text{لا}}$

۲ — ثابت کرو کہ خط مستقیم ما = ۲ لا − ۱ منحنی ما = لا^{۲} − لا + ۱ کا مماس ہے

۳ — ثابت کرو کہ خط ما = ۲ لا − ۱ منحنی ما = لا^{۴} + ۲ لا^{۳} − ۳ لا^{۲} − ۲ لا + ۳ کو دو الگ الگ نقطوں پر مس کرتا ہے۔

۴ — ثابت کرو کہ منحنی ما = لا^{۴} − ۶ لا^{۳} + ۱۳ لا^{۲} − ۱۱ لا + ۴ خط مستقیم ما = لا کو دو بار مس کرتا ہے۔ مبدأ سے اور جو مماس کھنچ سکتے ہیں ان کے نقاط تماس کے [illegible] دریافت کرو۔

۵ — منحنی ما = لا^{۴} − ۶ لا^{۳} + ۱۳ لا^{۲} − ۱۰ لا + ۵ پر نقطے معلوم کرو جہاں پر مماس

ما = ۲لا کے متوازی ہے۔ ثابت کرو کہ ان میں سے دو نقطوں پر ایک ہی مماس ہے۔

۶۔ مبدأ سے منحنی ما = ۴لا^{۳} − ۱۲لا^{۲} + ۹لا^{۲} − ۲لا کے جو مماس کھینچ سکتے ہیں ان کی مساواتیں دریافت کرو۔ نیز معلوم کرو کہ کہاں پر مماس محور لا کے متوازی ہے۔ شکل بناؤ۔

۷۔ ایک منحنی کے کسی نقطہ کا مماس اور معین دونوں کھینچے گئے ہیں۔ معین کے پایہ سے مماس پر عمود نکالا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ عمود ہے ما ÷ $\left\{ ۱ + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \right)^{۲} \right\}^{\frac{۱}{۲}}$ اس سے ثابت کرو کہ زنجیرہ ما = ج جتز $\frac{\text{لا}}{\text{ج}}$ میں یہ عمود مستقل ہے۔

۸۔ ثابت کرو کہ مبدأ سے مماس پر عمود $\left(\text{ما} - \text{لا} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \right) \div \left\{ ۱ + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \right)^{۲} \right\}^{\frac{۱}{۲}}$ ہے۔ دائرہ ما = ± $\sqrt{\text{ا}^{۲} - \text{لا}^{۲}}$ کی صورت میں اس کی تصدیق کرو کہ یہ عمود مستقل ہے اور قائم القطع زائد لا ما = ک^{۲} کی صورت میں یہ $\frac{۲\text{ک}^{۲}}{\sqrt{\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲}}}$ کے مساوی ہے۔

۹۔ قوت نمائی منحنی (شکل ۲۴ صفحہ ۱۱۰) ما = ب ق$^{\frac{\text{لا}}{\text{ا}}}$ میں ثابت کرو کہ زیر مماس مستقل ہے اور زیر عماد $\frac{\text{ما}^{۲}}{\text{ا}}$ ہے۔

۱۰۔ زنجیرہ ما = ج جتز $\frac{\text{لا}}{\text{ج}}$ میں زیر مماس ج ممز $\frac{\text{لا}}{\text{ج}}$ ہے، زیر عماد $\frac{۱}{۲}$ ج جتز $\frac{۲\text{لا}}{\text{ج}}$ اور عماد $\frac{\text{ما}^{۲}}{\text{ج}}$ ہے۔

۱۱۔ منحنی ما$^{\text{ن}}$ = ا$^{\text{ن}-۱}$ لا کا زیر مماس ن لا ہے۔

۱۲۔ ثابت کرو کہ منحنی $\left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}} \right)^{\text{ن}} + \left(\frac{\text{ما}}{\text{ب}} \right)^{\text{ن}} = ۲$، ن کی تمام قیمتوں کے لئے خط مستقیم $\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ما}}{\text{ب}} = ۲$ کو نقطہ (ا، ب) پر مس کرتا ہے۔

۱۳۔ جیبوں کے منحنی $ما = ب$ جیب $\frac{لا}{ا}$ میں زیر مماس $ا$ مس $\frac{لا}{ا}$ ہے، زیر عماد $\frac{۱}{۲} \frac{ب^۲}{ا}$ جب $\frac{۲لا}{ا}$ اور عماد $ب$ جب $\frac{لا}{ا} \sqrt{۱ + \frac{ب^۲}{ا^۲} جم^۲ \frac{لا}{ا}}$۔

۱۴۔ ثابت کرو کہ منحنی $ما = قو^{-عالا}$ جب $بہ لا$، $ما = قو^{-عالا}$ اُن نقطوں پر مس کرتے ہیں جہاں پر جب $لا = ۲ن\pi + \frac{\pi}{۲}$ جبکہ ن صحیح عدد ہے۔ منحنیوں کو کھینچو۔

۱۵۔ ثابت کرو کہ مبدأ میں سے خطوں کا ایک جوڑا ایسا کھینچ سکتا ہے کہ ہر ایک خط اُن تمام منحنیوں کو مس کرے جو مساوات $ما = ج$ جم $\frac{لا}{ج}$ میں ج کو مختلف قیمتیں دینے سے حاصل ہوتے ہیں۔

۱۶۔ ایک متحرک نقطہ کی رفتار (ع) کو معین اور رقبہ مرتسمہ کو فصلہ مانکر ایک منحنی بنایا گیا ہے، ثابت کرو کہ اسراع زیر عماد سے تعبیر ہوگا۔

۱۷۔ ایک ذرہ کی توانائی بالفعل ($\frac{۱}{۲}$ م $ع^۲$) کو معین اور فضا س کو فصلہ مانکر ایک منحنی بنایا گیا ہے، ثابت کرو کہ قوت منحنی کے ڈھال سے تعبیر ہوتی ہے۔

۱۸۔ ثابت کرو کہ منحنیات $ما^ن = ۲ ا^{ن-۱} لا$، $\frac{لا^ن}{ا^ن} + \frac{ما^ن}{ب^ن} = ۱$ کے مماسوں کی مساواتیں بالترتیب ذیل کی شکلوں میں رکھی جاسکتی ہیں

$$ما ما_۱ = ۲ا^{ن-۱} \left\{لا + (ن-۱) لا_۱\right\}، \quad \frac{لا\, لا_۱^{ن-۱}}{ا^ن} + \frac{ما\, ما_۱^{ن-۱}}{ب^ن} = ۱$$

۱۹۔ خط $ما = م لا + ج$ کے متوازی، مخروطی تراش $فہ (لا، ما) = ۰$ کے مماس کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ ان کے نقاط تماس کے ملانے والے خط کی مساوات ہے

$$\frac{جف\ فہ}{جف\ لا} + م \frac{جف\ فہ}{جف\ ما} = ۰$$

۳۹

۲۰۔ محدود انحنا والے بند بیضوی منحنی کے وتر ایک ثابت سمت کے متوازی کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ اس نظام میں کم از کم ایک وتر ایسا ضرور ہے جسکے سروں پر کے مماس متوازی ہیں۔

۲۱۔ ثابت کرو کہ ناقص لا = ا جم (ط + عہ)، ما = ب جم (ط + بہ) میں نقطہ ط₁ پر کا مماس نقطہ ط₂ میں سے گذرنے والے نیم قطر کے متوازی ہوگا

اگر ط₁ - ط₂ = ± $\frac{\pi}{2}$ -

۲۲۔ ناقص لا = ا جم ط + اَ جب ط، ما = ب جم ط + بَ جب ط کے صدری محوروں کے جواب میں ط کی قیمتیں دریافت کرو

$$\left[\text{مس ۲ ط} = \frac{2(\text{ا اَ} + \text{ب بَ})}{\text{ا}^2 + \text{ب}^2 - \text{اَ}^2 - \text{بَ}^2}\right]$$

۲۳۔ اس کے لئے شرط کہ منحنی ف (لا، ما) = ۰ کا عماد مبدأ میں سے گذرے

یہ ہے　$\text{لا}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} - \text{ما}\,\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} = 0$

مخروطی تراش ا لا² + ۲ ھ لا ما + ب ما² = ا کے صدری محوروں کی مساوات دریافت کرو۔

۲۴۔ اگر ب > ۲ ا تو مبدأ سے مکافی لا² = ۴ ا (ما + ب) کے تین حقیقی مماس کھینچ سکتے ہیں۔

۲۵۔ قائم زائد لا² - ما² = ا² کے کسی نقطہ پر کا عماد محوروں کے محوروں پر جو مقطوعے بناتا ہے انہیں معلوم کرو اور ثابت کرو کہ ان کے مربعوں کا فرق مستقل ہے۔

۲۶۔ ثابت کرو کہ زائد لا = ک ت، ما = $\frac{\text{ک}}{\text{ت}}$ کے مماس کی مساوات

لا + ت² ما = ۲ ک ت ہے۔

۲۷۔ اگر لا² + ما² = ا² تو ثابت کرو کہ لا² + ما² اعظم ہوگا جبکہ لا = ± ما، منحنی کو مرتسم کرو اور ثابت کرو کہ دائرہ لا² + ما² = ا² سے اس کا نیادہ سے زیادہ نیم قطری ہٹاؤ

۱۸۹ اور ا ہے۔

۲۸۔ ثابت کرو کہ سکانی $ر = \frac{ا}{جب^۲ \frac{طہ}{۲}}$ میں جہاں ا سکہ قطب ہے فہ = ۱۱ - $\frac{طہ}{۲}$
اس لئے ثابت کرو کہ مماس ا کی فاصلہ اور محور کے ساتھ مساوی زاویے بناتا ہے۔

۲۹۔ ایک منحنی پر دو متصل نقطے پ، پَ لئے گئے ہیں، خطوط مستقیم پ ر، پَ ر نیم قطروں پر علی القوائم کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ پ ر کی انتہائی قیمت جبکہ پَ، پ پر منطبق ہو $\frac{فر}{فطہ}$ ہے۔

۳۰۔ فہ وہ زاویہ ہے جو منحنی کا مماس مبدأ میں سے گذرنیوالے سمتی نیم قطر کے ساتھ بناتا ہے ثابت کرو کہ

$$مس\ فہ = \frac{لا \frac{فرما}{فرلا} - ما}{لا + ما \frac{فرما}{فرلا}}$$

۳۱۔ قائم قطع زائد $ر^۲ جم ۲طہ = ا^۲$ میں ثابت کرو کہ وہ خطوط جو نیم قطر اور مماس کے درمیانی زاویوں کی تنصیف کرتے ہیں سمت میں مستقل ہیں۔

۳۲۔ ثابت کرو کہ منحنی $\frac{ا}{ر}$ = ف (طہ) کے مماس کی مساوات نقطہ طہ = عہ پر ہے

$$\frac{ا}{ر} = ف(عہ) جم(طہ - عہ) + فَ(عہ) جب(طہ - عہ)$$

اسلئے ثابت کرو کہ مخروطی تراش $\frac{ل}{ر}$ = ۱ + ز جم طہ کے مماس کی مساوات ہے

$$\frac{ل}{ر} = ز جم طہ + جم(طہ - عہ)$$

۱۴۱

پانچواں باب

اعلیٰ رتبہ کے مشتقات

۶۴ — تعریف اور ترقیم — اگر ما متغیر لا کا تفاعل ہو تو مشتق تفاعل $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ بھی عموماً لا کا قابل تفرق تفاعل ہوگا۔ $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کو تفرق کرنے کا نتیجہ 'دوسرا تفرقی سر' یا 'دوسرا مشتق' کہلاتا ہے اور اگر یہ پھر تفرق کے قابل ہے تو نتیجہ کو 'تیسرا تفرقی سر' یا 'تیسرا مشتق' کہتے ہیں اور اسی طرح اعلیٰ رتبہ والے مشتقوں کے لئے۔ اگر $\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}$ کو اس عمل کی علامت تصور کیا جائے تو پہلے، دوسرے، تیسرے ..... ن ویں مشتقوں کو بالترتیب حسب ذیل علامات سے ظاہر کیا جائیگا

$$\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\text{ما}،\ \left(\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\right)^2\text{ما}،\ \left(\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\right)^3\text{ما}،\ \ldots\ldots\ \left(\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\right)^{\text{ن}}\text{ما}$$

انکی زیادہ عام شکل ہے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$، $\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فر لا}^2}$، ..... $\frac{\text{فر}^{\text{ن}}\text{ما}}{\text{فر لا}^{\text{ن}}}$، انہیں اوپر کی علامات کا اختصار سمجھنا چاہئے۔

نیز دفعہ ۲۵ کے مطابق $\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}$ کے بجائے عف لکھنے سے ہمیں

عف ما، عف^2 ما، عف^3 ما، ..... عف$^{\text{ن}}$ ما حاصل ہوتے ہیں۔

اگر ما = فما (لا) تو متواتر مشتقات فما (لا)، فمآ (لا)، فمآآ (لا)... فما^(ن) (لا) سے بھی ظاہر کئے جا سکتے ہیں۔ بعض موقعوں پر زیادہ مختصر ترقیم ما^۱، ما^۲، ما^۳... ما^(ن) اختیار کرنے سے سہولت ہوگی۔

چند صورتیں ایسی ہیں کہ ان میں تفاعل کے ن ویں مشتق کے لئے عام جملہ دریافت کیا جا سکتا ہے۔ ان میں سے زیادہ اہم صورتیں ذیل کی مثالوں میں دی گئی ہیں۔

۱۴۲

مثال ۱۔ اگر ما = ا٠ + ا١ لا + ا٢ لا^۲ + ... + ام لا^م ....(۱)

تو عفـ ما = ا١ + ۲ ا٢ لا + ۳ ا٣ لا^۲ + ... + م ام لا^(م-۱)

عفـ^۲ ما = ۲×۱ ا٢ + ۳×۲ ا٣ لا + ... + م×(م-۱) ام لا^(م-۲) ......(۲)

....

عفـ^م ما = م(م-۱)(م-۲)......۲×۱ ام

اور اسلئے عفـ^(م+۱) ما = ۰، عفـ^(م+۲) ما = ۰ وغیرہ وغیرہ ....(۳)

پس م ویں درجہ کے منطق صحیح تفاعل کا م واں مشتق مستقل ہے اور اس سے اعلیٰ رتبہ کے مشتقات صفر ہیں۔

مثال ۲۔ اگر ما = ۂو^(ک لا) (ک مستقل) ....(۴)

تو عفـ ما = ک ۂو^(ک لا)، عفـ^۲ ا = ک^۲ ۂو^(ک لا) ....

اور عموماً عفـ^ن ما = ک^ن ۂو^(ک لا) ....(۵)

پس ک = لوک ا رکھنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

عفـ^ن ا^لا = (لوک ا)^ن ا^لا ....(۶)

مثال ۳۔ اگر ما = جب بہ لا ....(۷)

تو عفـ ما = بہ جم بہ لا، عفـ^۲ ما = - بہ^۲ جب بہ لا

عفـ^۳ ما = - بہ^۳ جم بہ لا، عفـ^۴ ما = بہ^۴ جب بہ لا ....(۸)

اور علیٰ ہذا القیاس۔

یا بطرز دیگر عف ما = بہ جب (بہ لا + $\frac{\pi}{۲}$)

اور اس لئے عف^{۲} ما = بہ^{۲} جب (بہ لا + $\frac{\pi}{۲}$ + $\frac{\pi}{۲}$)

اور شکل عامہ عف^{ن} ما = بہ^{ن} جب (بہ لا + $\frac{ن\pi}{۲}$) ......(۹)

مثال ۴ — اگر ما = جم بہ لا ....(۱۰)

تو عف ما = − بہ جب بہ لا ، عف^{۲} ما = − بہ^{۲} جم بہ لا
عف^{۳} ما = + بہ^{۳} جب بہ لا ، عف^{۴} ما = بہ^{۴} جم بہ لا } ...(۱۱)

اور علیٰ ہذا القیاس۔

یا عف ما = بہ جم (بہ لا + $\frac{\pi}{۲}$)

اس لئے عف^{۲} ما = بہ^{۲} جم (بہ لا + $\frac{\pi}{۲}$ + $\frac{\pi}{۲}$)

اور شکل عامہ عف^{ن} ما = بہ^{ن} جم (بہ لا + $\frac{ن\pi}{۲}$) ....(۱۲)

مثال ۵ — اگر ما = ھو$^{عہ لا}$ جم بہ لا ....(۱۳)

تو عف ما = ھو$^{عہ لا}$ (عہ جم بہ لا − بہ جب بہ لا)
عف^{۲} ما = ھو$^{عہ لا}$ {(عہ^{۲} − بہ^{۲}) جم بہ لا − ۲ عہ بہ جب بہ لا} ...(۱۴)

اسی طرح اگر ما = ھو$^{عہ لا}$ جب بہ لا ....(۱۵)

تو عف ما = ھو$^{عہ لا}$ {عہ جب بہ لا + بہ جم بہ لا}
عف^{۲} ما = ھو$^{عہ لا}$ {(عہ^{۲} − بہ^{۲}) جب بہ لا + ۲ عہ بہ جم بہ لا} ...(۱۶)

ان صورتوں میں عہ = ر جم طہ ، بہ = ر جب طہ ....(۱۷)

رکھنے سے عام ضابطہ دریافت ہو سکتا ہے۔ کیونکہ اسکی مدد سے

عف (قو^عہ لا^ جم بہ لا) = قو^عہ لا^ (عہ جم بہ لا - بہ جب بہ لا)

= ر قو^عہ لا^ جم (بہ لا + طہ)

اور اس نتیجہ کو بار بار استعمال کرکے ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ

عف^ن^ (قو^عہ لا^ جم بہ لا) = ر^ن^ قو^عہ لا^ جم (بہ لا + ن طہ) ....(۱۸)

اسی طرح عف^ن^ (قو^عہ لا^ جب بہ لا) = ر^ن^ قو^عہ لا^ جب (بہ لا + ن طہ) ...(۱۹)

مثال ۶ ۔ اگر ما = لوک لا .... (۲۰)

تو عف ما = لا^-۱^، عف^۲^ ما = - لا^-۲^، عف^۳^ ما = (-۱)(-۲) لا^-۳^ ....

اور شکل عامہ ہے عف^ن^ ما = (-۱)(-۲)(-۳) .... × (ن - ۱) لا^-ن^

= (-۱)^ن-۱^ (ن-۱)! / لا^ن^ .... (۲۱)

۹۵ ۔ حاصل ضرب کے متواتر مشتقات ۔ لیبنیز کا مسئلہ

اگر ع اور و متغیر لا کے تفاعل ہوں تو دفعہ ۳۱ (۲۰) کی رو سے

عف (ع و) = و × عف ع + ع × عف و .... (۱)

اگر اسے ہم دوبارہ تفرق کریں تو

عف^۲^ (ع و) = عف (و عف ع) + عف (ع عف و)

اب مذکور بالا ضابطہ کے مطابق

عف (و عف ع) = و عف^۲^ ع + عف ع × عف و

اور عف (ع عف و) = عف ع × عف و + ع عف^۲^ و

پس عف^۲^ (ع و) = و عف^۲^ ع + ۲ عف ع × عف و + ع عف^۲^ و ... (۲)

حاصل ضرب کے ن ویں مشتق کے لئے عام ضابطہ ہے

$$\text{عف}^{\text{ن}}(\text{ع و}) = \text{و عف}^{\text{ن}}\text{ع} + \text{ن عف}^{\text{ن-۱}}\text{ع} \times \text{عف و} + \frac{\text{ن(ن-۱)}}{\lfloor ۲} \text{عف}^{\text{ن-۲}}\text{ع} \times \text{عف}^{۲}\text{و} +$$

$$\ldots\ldots + \text{ن عف ع} \times \text{عف}^{\text{ن-۱}}\text{و} + \text{ع عف}^{\text{ن}}\text{و} \ldots\ldots (۳)$$

اس میں رقموں کے سرو ہی ہیں جو مسئلہ ثنائی میں ہوتے ہیں۔ اس مسئلہ کو لبنٹ نے دریافت کیا نتیجہ (۳) کی صداقت ثابت کرنیکے لئے ع و کے چند ابتدائی مشتقوں کے حاصل کرنے کے طریقے پر غور کرو ۔

ہم مشتقوں کے لئے زبر کی ترسیم استعمال کرینگے

$$\text{پس} \quad \text{عف(ع و)} = \text{عَ و} + \text{ع وَ} \ldots\ldots\ldots (۴)$$

اس کو دوبارہ تفرق کرنے سے

$$\text{عف}^{۲}(\text{ع و}) = \text{عً و} + ۲\,\text{عَ وَ} + \text{ع وً} \ldots\ldots\ldots (۵)$$

اگلے تفرق سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{عف}^{۳}(\text{ع و}) = \text{عٌ و} + ۲\,\text{عً وَ} + \text{عَ وً}$$

$$+ \text{عً وَ} + ۲\,\text{عَ وً} + \text{ع وٌ} \ldots\ldots (۶)$$

اس آخری ضابطہ کی پہلی سطر ضابطہ (۵) کی ہر رقم کے پہلے متغیر کو تفرق کرنے سے حاصل ہوئی ہے اور دوسری سطر دوسرے متغیر کو تفرق کرنے سے ۔

پس حاصل ہوا کہ

$$\text{عف}^{۳}(\text{ع و}) = \text{عٌ و} + ۳\,\text{عً وَ} + ۳\,\text{عَ وً} + \text{ع وٌ} \ldots\ldots (۷)$$

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ ضابطہ (۷) کی ر ویں رقم کا عددی سر ضابطہ (۵) کی ر ویں اور (ر-۱) ویں رقموں کے عددی سروں کا مجموعہ ہے ۔ ان متواتر قدموں کے طرز سے ظاہر ہے کہ یہ قاعدہ اگلے مشتقوں کے لئے بھی صحیح ہوگا۔ اب عین یہی قاعدہ (ا + ب) کی متواتر قوتوں کے پھیلاؤ میں سروں کے مرتب کرنے کا ہے اور چونکہ عف(ع و) کے سرو ہی ہیں جو (ا + ب) کی پہلی قوت کے سر ہیں تو ثابت ہوا کہ عف$^{\text{ن}}$ (ع و) کے سرو بھی وہی ہیں جو ہوتے ہیں جو (ا + ب)$^{\text{ن}}$ کے پھیلاؤ میں ہوتے ہیں ۔

مثالِ ۱۔ اگر ما = لا ع .... (۸)

تو عف^ن ما = لا عف^ن ع + ن × عف لا × عف^(ن-۱) ع، چونکہ عف^۲ لا = ۰

= لا عف^ن ع + ن عف^(ن-۱) ع .... (۹)

پس اگر ما = لا جب بہ لا .... (۱۰)

تو عف^۲ ما = لا عف^۲ (جب بہ لا) + ۲ عف (جب بہ لا)

= - بہ^۲ لا جب بہ لا + ۲ بہ جم بہ لا .... (۱۱)

نیز اگر ما = لا لوک لا .... (۱۲)

تو عف^ن ما = لا عف^ن (لوک لا) + ن عف^(ن-۱) (لوک لا)

= (-۱)^(ن-۱) (ن-۱)! / لا^(ن-۱) + (-۱)^(ن-۲) ن (ن-۲)! / لا^(ن-۱) ، دفعہ ۶۴ (۲۱) کے مطابق

پس عف^ن ما = (-۱)^ن (ن-۲)! / لا^(ن-۱) .... (۱۳)

۱۴۵

مثالِ ۲۔ اگر ما = فو^(ا لا) × ع .... (۱۴)

تو عف^ن ما = فو^(ا لا) × عف^ن ع + ن عف فو^(ا لا) × عف^(ن-۱) ع + [ن(ن-۱) / (۲×۱)] عف^۲ فو^(ا لا) عف^(ن-۲) ع + ...

= فو^(ا لا) [عف^ن ع + ن ا عف^(ن-۱) ع + [ن(ن-۱) / (۲×۱)] ا^۲ عف^(ن-۲) ع + ...] .... (۱۵)

پس اگر ما = فو^(ا لا) جب ب لا .... (۱۶)

تو عف^۲ ما = فو^(ا لا) (عف^۲ جب ب لا + ۲ ا عف جب ب لا + ا^۲ جب ب لا)

= فو^(ا لا) {(ا^۲ - ب^۲) جب ب لا + ۲ ا ب جب ب لا} .... (۱۷)

اور یہ ضابطہ دفعہ ۶۴ (۱۶) کے مطابق ہے۔

۶۶۔ **حرکیات کی مثالیں**:۔ تفرقی احصا کے حرکیاتی اطلاقات میں

دوسرا مشتق خاص حصہ لیتا ہے۔ چنانچہ خطی حرکت کی صورت میں اگر ثابت مبدأ سے فاصلہ س ہو تو دفعہ ۲۶ میں ہم نے دیکھا ہے کہ رفتار ر اور اسراع ع ذیل کے ضابطوں سے حاصل ہوتے ہیں

$$\text{ر} = \frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} \ ، \ \text{ع} = \frac{\text{فرر}}{\text{فرت}} \qquad \cdots\cdots (1)$$

پس موجودہ ترقیم کے مطابق $\text{ع} = \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}}\right) = \frac{\text{فر}^2\text{س}}{\text{فرت}^2} \qquad \cdots\cdots (2)$

یعنی بلحاظ وقت کے س کا دوسرا مشتق اسراع کی پیمائش کرتا ہے۔

نیز دفعہ ۲۶ کی ترقیم میں ثابت محور کے گرد ایک جسم کا زاوی اسراع ہے

$$\frac{\text{فرسہ}}{\text{فرت}} = \frac{\text{فر}^2\text{طہ}}{\text{فرت}^2} \qquad \cdots\cdots (3)$$

مثال ۱۔ اگر س وقت ت کا دو درجی تفاعل ہو یعنی فرض کرو کہ

$$\text{س} = \text{ا ت}^2 + \text{ب ت} + \text{ج} \qquad \cdots\cdots (4)$$

تو

$$\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} = \text{۲ ا ت} + \text{ب}$$

اور

$$\frac{\text{فر}^2\text{س}}{\text{فرت}^2} = \text{۲ا} \qquad \cdots\cdots (5)$$

یعنی اسراع مستقل ہے۔

مثال ۲۔ سادہ موسیقی حرکت میں

۲۶

$$\text{س} = \text{ا جم (ن ت + صہ)} \qquad \cdots\cdots (6)$$

پس

$$\frac{\text{فرس}}{\text{فرت}} = -\text{ن ا جب (ن ت + صہ)}$$

اور

$$\frac{\text{فر}^2\text{س}}{\text{فرت}^2} = -\text{ن}^2\text{ا جم (ن ت + صہ)} = -\text{ن}^2\text{س} \qquad \cdots\cdots (7)$$

یعنی اسراع ہمیشہ ایک ثابت نقطے (س کے مبدا کی سمت میں) کی طرف اور اس نقطہ سے

فاصلے کے متناسب ہے۔

مثال ۳۔ اگر س = ا جمز ن ت + ب جمز ن ت ...(۸)

تو $\frac{\text{فس}}{\text{فت}}$ = ن ا جمز ن ت ، ن ب جمز ن ت

اور $\frac{\text{ف}^2\text{س}}{\text{فت}^2}$ = ن² ا جمز ن ت + ن² ب جمز ن ت = ن² س ...(۹)

یعنی اسراع ثابت نقطہ سے مخالف سمت میں ہے اور فاصلے کے متناسب ہے۔

۶۷۔ تقعر اور تحدب۔ نقاط انعطاف۔

جیسے فہَ (لا) دفعہ ۲۶ کے مطابق فہ (لا) کے اضافہ کی شرح کو ناپتا ہے ویسے ہی فہً (لا) یعنی فہَ (لا) کے اضافہ کی شرح کو ناپتا ہے۔ پس اگر فہً (لا) مثبت ہے تو منحنی

ما = فہ (لا) .... (۱)

کا ڈھال لا کے ساتھ بڑھ رہا ہے اور اگر فہً (لا) منفی ہے تو ڈھال لا کے ساتھ گھٹ رہا ہے۔

اگر فہً (لا) = ۰ تو ڈھال کے بدلنے کی شرح ایک لمحہ کے لئے صفر ہے اور یہاں مماس ساکن ہے اس کی سادہ مثال نقطہ انعطاف ہے یعنی وہ نقطہ جس پر منحنی اپنے مماس کو عبور کرے (دیکھو شکل ۴۰)۔

منحنی کو کسی نقطہ پ پر اوپر کی طرف مقعر اس وقت کہتے ہیں جبکہ منحنی کا وہ حصہ جو نقطہ پ کی عین قربت میں ہے کلیتاً پ کے مماس کے اوپر واقع ہو۔ لیکن اسے اوپر کی طرف محدب کہتے ہیں جبکہ وہ کلیتاً مماس کے نیچے واقع ہو۔

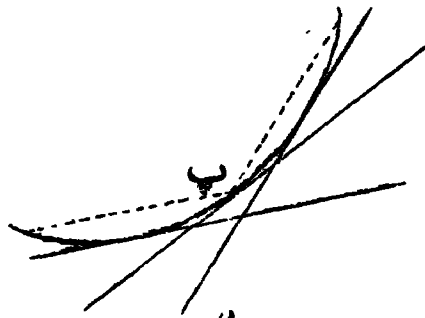
اگر منحنی کا وہ حصہ جو پ کی دائیں جانب ہے نقطہ پ کے مماس کے اوپر واقع ہو (جیسے کہ شکل ۳۹ میں) تو دفعہ ۵۲ سے صاف ظاہر ہے کہ پ کے دائیں جانب کی سمت متیر (خواہ وہ کتنی ہی چھوٹی کیوں نہ ہو) ہمیشہ ایسے نقطے تک پہنچے جس پر فہَ (لا) کی قیمت نقطہ پ پر کی قیمت سے زیادہ ہو۔ پس

دفعہ ۵۸ کے مطابق نقطہ پ پر فمؔ (لا) کی قیمت منفی نہیں ہو سکتی۔ اگر منحنی کا وہ حصہ جو پ کے بائیں جانب ہے پ پر کے مماس کے اوپر واقع ہو تو بھی یہی نتیجہ قائم رہے گا۔

اسی طرح اگر منحنی کے نقطہ پ کے دائیں یا بائیں جانب کا حصہ پ کے مماس کے نیچے واقع ہو تو فمؔ (لا) کی قیمت نقطہ پ پر مثبت نہیں ہو سکتی۔

پس اس بحث سے حاصل ہوا کہ منحنی اوپر کی طرف مقعر ہو گا اگر فمؔ (لا) مثبت ہو اور اوپر کی طرف محدب ہو گا اگر فمؔ (لا) منفی ہو۔

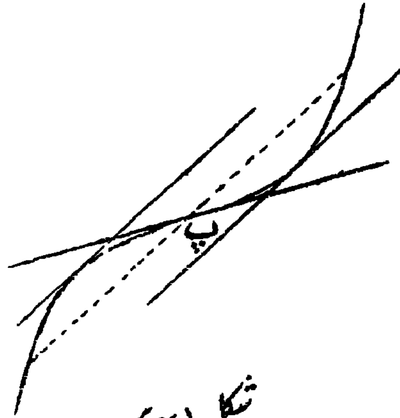
نیز یہ ظاہر ہے کہ نقطہ انعطاف پر (جہاں منحنی اپنے مماس کو عبور کرتا ہے) فمؔ (لا) نہ مثبت ہو سکتا ہے اور نہ منفی۔ اور چونکہ اس کو محدود فرض کر لیا گیا ہے اس لئے اس کا صفر ہونا لازمی ہے۔ یہ شرط اگرچہ ضروری ہے لیکن کافی نہیں۔



شکل (۳۹)

اس کے علاوہ یہ ضروری ہے کہ جب، لا کی قیمت بڑھتے بڑھتے زیر بحث قیمت میں سے گزرے تو فمؔ (لا) کی علامت بدلے۔ مثلاً فرض کرو کہ پ کے بائیں جانب منحنی مماس کے نیچے ہے اور دائیں جانب اوپر ہے۔ دفعہ ۵۶ سے ظاہر ہے کہ منحنی کے دائیں اور بائیں جانب پ کے قریب میں ایسے نقطے ہونگے جن پر ڈھال پ پر کے ڈھال سے بڑا ہے۔ یعنی ڈھال کی پ پر اقل قیمت ہے اور اس لئے دفعہ ۵ کے مطابق فمؔ (لا) کی علامت

منفی سے مثبت ہونی چاہئے۔



شکل (۴۰)

اگر منحنی مماس کو مذکورۂ بالا سمت سے مخالف سمت میں عبور کرتا ہے تو پ پر ڈھال کی اعظم قیمت ہوگی اور فہ'' (لا) کی علامت مثبت سے منفی ہوگی۔

مثال ۱۔ اگر $\text{ما} = \text{لا}^{3}$ .... (۲)

تو $\text{ما}'' = ۶\,\text{لا}$

جیسے لا کی قیمت صفر میں سے گزرتے ہوئے بڑھتی ہے ویسے ما'' کی قیمت منفی سے مثبت ہوتی ہے اور اِس لئے یہ نقطہ انعطاف ہے۔ شکل ۳۱ (صفحہ ۱۴۸) دیکھو۔

مثال ۲۔ اگر $\text{ما} = \dfrac{۲\,\text{لا}}{۱ + \text{لا}^{2}}$ .... (۳)

تو $\text{ما}'' = \dfrac{۴\,\text{لا}\,(\text{لا}^{2} - ۳)}{(۱ + \text{لا}^{2})^{3}}$

پس ہمیں تین نقاط انعطاف ہیں یعنی جبکہ $\text{لا} = ۰$ اور $\text{لا} = \pm\sqrt{۳}$ شکل ۱۳ (صفحہ ۴۰) دیکھو۔

مثال ۳۔ جیب کے منحنی $\text{ما} = \text{ب}\ \text{جب}\ \dfrac{\text{لا}}{\text{ا}}$ .... (۴)

کی صورت میں $ف''$ = - $\frac{ب}{ل^۲}$ جب $\frac{ل}{ل}$ = - $\frac{ف}{ل^۲}$

پس $ف''$ علامت بدلتا ہے، اس لئے وہ تمام نقاط جن پر منحنی $ل$ محور کو کاٹتا ہے نقاط انعطاف ہیں دیکھو شکل ۱۴ (صفحہ ۴۲)۔

مثال ۴۔ منحنی $ف = ل^۴$ .... (۵) میں $ف'' = ۱۲ ل^۲$

نقطہ $ل = ۰$ پر $ف''$ صفر ہو جاتا ہے لیکن اسکی علامت نہیں بدلتی۔ پس ساکن نما تو ہے لیکن صحیح معنوں میں نقطہ انعطاف نہیں ہے۔ یہ امر اس بات سے بھی ظاہر ہے کہ $ل^۴$ لازماً مثبت ہے اور پورا منحنی مبدأ کے مماس کے ایک ہی جانب واقع ہوتا ہے۔

۶۸۔ اقل اور اعظم قیمتوں میں مشتق کا استعمال۔

تفاعل فہ (ل) کی اقل اور اعظم قیمتوں میں امتیاز کرنے کی جانچ جو دفعہ ۱۵ میں بیان کی گئی ہے وہ دوسرے مشتق فہ'' (ل) کے رقوم میں بھی بالعموم بیان ہو سکتی ہے۔

چونکہ فہ'' (ل) خود فہ' (ل) کا مشتق ہے، اس لئے ظاہر ہے کہ اگر فہ'' (ل) مثبت ہے جبکہ ل کی قیمت بڑھتے بڑھتے فہ' (ل) = ۰ کی ایک اصل میں سے گزرتی ہے تو فہ' (ل) لازماً بڑھ رہا ہے اور اس لئے اسکی علامت منفی سے مثبت ہوتی ہے۔ پس فہ (ل) اس مقام پر اقل ہے اسی طرح اگر فہ'' (ل) منفی ہے جبکہ فہ' (ل) = ۰، تو لازماً فہ' (ل) گھٹ رہا ہے اور اس لئے اس کی علامت مثبت سے منفی ہوتی ہے۔ پس اس مقام پر فہ (ل) کی اعظم قیمت ہے۔

ان نتیجوں کا تقعر اور تحدب کے ساتھ ربط بالکل ظاہر ہے۔

مثال ا۔ ثابت کرو کہ خطی حرکت میں مبدأ سے فاصلہ س کی قیمت اقل یا اعظم ہوگی جبکہ رفتار $\frac{ف س}{ف ت}$ صفر ہو اور اسراع $\frac{ف^۲ س}{ف ت^۲}$ بالترتیب مثبت یا منفی ہو۔

مثال ۲ — فرض کرو کہ $فہ(لا) = \frac{لا^2}{1 + لا^4}$

تو دفعہ ۱۵ کی مثال میں دکھایا گیا ہے کہ فہَ (لا)، لا = ۱ اور لا = -۱ کے لئے صفر ہوتا ہے۔ نیز دفعہ ۶۷ کی مثال (۲) میں فہً (لا) کی معلومہ قیمت سے حاصل ہوتا ہے کہ

فہً (۱) = -۱ اور فہً (-۱) = ۱

پس لا = ۱ سے تفاعل فہ (لا) کی اعظم قیمت حاصل ہوتی ہے اور لا = -۱ سے اقل قیمت۔ دیکھو شکل ۱۳ (صفحہ ۴۰)۔

البتہ ممکن ہے کہ لا کی کوئی خاص قیمت جو فہَ (لا) کو صفر بناتی ہے فہً (لا) کو بھی صفر بنادے۔ ایسی صورت میں آسانی سے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ بغیر پر بانعوم فہ (لا) کی اقل اور اعظم قیمت نہیں ہوتی۔ دیکھو شکل ۱۴ (صفحہ ۴۱)۔ لیکن یہاں اس پر بحث جاری رکھنا مفید نہ ہوگا۔ عام قاعدہ پندرھویں باب میں ٹیلر کے مسئلہ سے حاصل کیا جائیگا۔

۶۹ — مساواتوں کے نظریہ میں متواتر مشتقات۔

متواتر مشتق تفاعل مساواتوں کے نظریہ میں بڑا اہم مقصد رکھتے ہیں۔ دفعہ ۵۰ میں ہم نے ثابت کیا ہے کہ اگر فہ (لا) منطق صحیح تفاعل ہو تو فہَ (لا) = ۰ کی کم از کم ایک اصل فہ (لا) = ۰ کی کوئی دو اصلوں کے درمیان ضرور ہوگی۔ اسی طرح فہً (لا) = ۰ کی کم از کم ایک اصل فہَ (لا) = ۰ کی کوئی دو اصلوں کے درمیان ہوگی۔ اور اسی طرح باقی مشتقوں کے لئے۔ نیز چونکہ فہ (لا) = ۰ کی ر، رتبہ کی اصل فہَ (لا) = ۰ کی (ر-۱)، رتبہ کی اصل ہوگی اسلئے یہ فہً (لا) = ۰ کی (ر-۲)، رتبہ کی اصل ہوگی۔ اور اسی طرح وہ بالآخر $فہ^{(ر-۱)}$ (لا) = ۰ کی ایک رتبہ کی سادہ اصل ہوگی۔ پس فہ (لا) = ۰ کی ر، رتبہ کی اصل ہونے کے لئے ضروری اور کافی شرط یہ ہے کہ تفاعل

فہ(لا)، فہَ(لا)، فہً(لا)، ..... فہ$^{(ن-۱)}$(لا) ....(۱)

سب ایک ساتھ صفر ہوں۔

مثال۔ اگر فہ(لا) = ۲لا^{۵} + ۵لا^{۴} + ۴لا^{۳} + ۲لا^{۲} + ۲لا + ۱

تو فہَ(لا) = ۱۰لا^{۴} + ۲۰لا^{۳} + ۱۲لا^{۲} + ۴لا + ۲

اور فہً(لا) = ۴۰لا^{۳} + ۶۰لا^{۲} - ۲۴لا + ۴

یہ تینوں تفاعل لا = -۱ کے لئے صفر ہوتے ہیں، اس لئے یہ فہ(لا) = ۰ کی تیسرے رتبہ کی یا تہری اصل ہے حقیقت میں

فہ(لا) = (لا + ۱)^{۳} (۲لا^{۲} - لا + ۱)

۷۰ — دوسرے مشتق کی ہندسی تعبیر —

دفعہ ۵۷ میں پہلے مشتق تفاعل کی ایک مشہور خاصیت منحنی ما = فہ(لا) .....(۱) کو دراصل ایک سیدھے خط ما = ا + ب لا .....(۲) کے ساتھ تقابلہ کرنے سے حاصل کی گئی تھی۔ اور مستقل ا اور ب اس شرط سے دریافت کئے گئے تھے کہ (۱) اور (۲) ایکدوسرے کو لا کی دو معلومہ قیمتوں کیلئے قطع کریں۔

۱۵۰

اسی طور پر ہم منحنی (۱) کا مکافی ما = الا^{۲} + ب لا + ج ......(۳) کے ساتھ تقابلہ کرتے ہیں اور مستقلات ا، ب، ج کو اس شرط کے تابع معلوم کرتے ہیں کہ (۱) اور (۳) لا کی تین معلومہ قیمتوں کے لئے ایکدوسرے کو قطع کریں۔

(آ) پہلے ہم فرض کرتے ہیں کہ لا کی تین قیمتیں مساوی الفصل ہیں یعنی

ا - ہ، ا، ا + ہ،

اب مستقل دریافت کرنے کی مساواتیں ہیں

ا + ب (ا − ھ) + ج (ا − ھ)² = فا (ا − ھ)

ا + ب ا + ج ا² = فا (ا) ...(۴)

ا + ب (ا + ھ) + ج (ا + ھ)² = فا (ا + ھ)

ایک نیا تفاعل فاَ (لا) ایسا فرض کرو کہ

فاَ (لا) = فا (لا) − (ا + ب لا + ج لا²) ....(۵)

یعنی فاَ (لا) منحنی (۱) اور (۳) کے معیّنوں کا فرق ہے۔ مفروضہ سے فاَ (لا) صفر ہے جبکہ لا = ا − ھ اور لا = ا ۔ پس دفعہ ۹۴ سے مشتق تفاعل فاَ (لا) متغیر لا کی کسی خاص درمیانی قیمت کے لئے صفر ہوگا۔
یعنی

فاَ (ا − طہ₁ ھ) = ۰ ....(۶)

جہاں ۰ > طہ₁ > ۱ ۔ نیز چونکہ فاَ (لا) صفر ہے لا = ا اور لا = ا + ھ کے لئے اس لئے

فاَ (ا + طہ₂ ھ) = ۰ ....(۷)

جہاں ۰ > طہ₂ > ۱

اس دلیل کو دوبارہ استعمال کرنے سے چونکہ فاَ (لا) صفر ہے جبکہ لا = ا − طہ₁ ھ اور لا = ا + طہ₂ ھ اس لئے اس کا مشتق تفاعل فاً (لا) بھی لا کی کسی خاص درمیانی قیمت کے لئے صفر ہوگا۔ یعنی

فاً (ا + طہ ھ) = ۰ ....(۸)

جہاں طہ ایسی مقدار ہے جو کسور −طہ₁ اور طہ₂ کے درمیان واقع ہے اور اس لئے ضروری طور پر ± ۱ کے درمیان ہے۔

چونکہ ضابطہ (۵) سے فاً (لا) = فاً (لا) − ۲ ج ....(۹)

اس سے ثابت ہوا کہ طہ کی ± ۱ کے درمیان کسی خاص قیمت کے لئے

فاً (ا + طہ ھ) = ۲ ج ....(۱۰)

اب (۴) کے ضابطوں سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{فا}(ا+ھ) - ۲\,\text{فا}(ا) - \text{فا}(ا-ھ) = ۲\,ج\,ھ^۲ \quad .....(۱۱)$$

اور اسلئے

$$\frac{\text{فا}(ا+ھ) - ۲\,\text{فا}(ا) + \text{فا}(ا-ھ)}{ھ^۲} = \text{فا}''(ا+ط\,ھ) \quad (۱۲)$$

پس

$$\underset{ھ \to ۰}{\text{نہا}} \frac{\text{فا}(ا+ھ) - ۲\,\text{فا}(ا) + \text{فا}(ا-ھ)}{ھ^۲} = \text{فا}''(ا) \quad .....(۱۳)$$

اسی طریقہ پر ثابت کرسکتے ہیں

$$\underset{ھ \to ۰}{\text{نہا}} \frac{\text{فا}(ا+۲ھ) - ۲\,\text{فا}(ا+ھ) + \text{فا}(ا)}{ھ^۲} = \text{فا}''(ا) \quad .....(۱۴)$$

اگر فرق فا(ا + ھ) − فا(ا) کو مف فا سے ظاہر کیا جائے تو

$$\{\text{فا}(ا+۲ھ) - \text{فا}(ا+ھ)\} - \{\text{فا}(ا+ھ) - \text{فا}(ا)\}$$

متبوع متغیر کے مساوی اضافوں ھ کے لئے فرقوں کا فرق یعنی دوسرا فرق مف(مف فا) یا $\text{مف}^۲\,\text{فا}$ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

پس ضابطہ (۱۴) ضابطہ ذیل کے معادل ہے

$$\underset{\text{مف}\,ا \to ۰}{\text{نہا}} \frac{\text{مف}^۲\,\text{فا}}{(\text{مف}\,ا)^۲} = \frac{\text{فر}^۲\,\text{فا}}{\text{فر}\,ا^۲} \quad ....(۱۵)$$

ترقیم $\frac{\text{فر}^۲\,\text{فا}}{\text{فر}\,ا^۲}$ کی یہی وجہ تھی کیونکہ یہ دوسرے فرق کی انتہائی شکل ہے۔

مسئلہ (۱۳) کی ہندسی تعبیر دریافت کرنے کے لئے فرض کرو کہ شکل (۴۱) میں

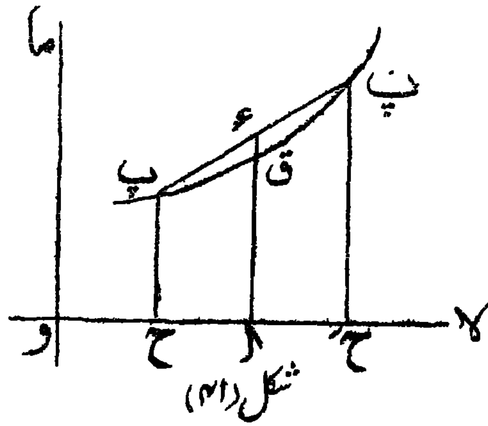
$$و\,ا = ا،\quad و\,ح = ا - ھ،\quad و\,حَ = ا + ھ$$

اور اق، ح پ اور حَ پَ منحنی (۱) کے ان نقاط پر بالترتیب معین ہیں

پ پَ کو ملاؤ اور فرض کرو کہ اق خط پ پَ سے نقطہ ع پر ملتا ہے۔ تو

$$ع\,ا = \frac{۱}{۲}(پَ\,حَ + پ\,ح)$$

$$= \frac{۱}{۲}\{\text{فا}(ا+ھ) + \text{فا}(ا-ھ)\}$$



شکل (۴۱)

اور اس لئے   ءق = ءا - ق ا

= ½ { فما (ا + ھ) - ۲ فما (ا) + فما (ا - ھ) }

اب ضابطہ (۱۳) اس بات کی تصدیق کرتا ہے کہ انتہا میں

ءق = ½ (ح ا)² × فمً (ا) .... (۱۶)

اس سے ظاہر ہے کہ وتر کا قوس کے اوپر یا نیچے ہونا فمً (ا) کے مثبت یا منفی ہونے پر منحصر ہے۔

(۲) اب ہم فرض کرتے ہیں کہ منحنی (۱) اور (۳) کے تین نقاط تقاطع میں سے دو ایکدوسرے پر منطبق ہوتے ہیں، یعنی ہم فرض کرتے ہیں کہ نقطہ لا = ا کے لئے دو منحنی ایک دوسرے کو نہ صرف کاٹتے ہیں بلکہ مس کرتے ہیں اور نقطہ لا = ا + ھ پر وہ ایک دوسرے کو پھر کاٹتے ہیں۔

نقطہ لا = ا پر دونوں منحنیوں کے لئے ما اور فرما/فرلا کی ایک ہی قیمت ہونے کے لئے یہ شرطیں ہیں کہ

$$\left.\begin{array}{l} \text{ا + ب ا + ج ا}^2 = \text{فما (ا)} \\ \text{ب + ۲ ج ا = فمَا (ا)} \end{array}\right\} \ldots\ldots (۱۷)$$

اور تیسری شرط سے حاصل ہوتا ہے کہ

ا + ب (ا + ھ) + ج (ا + ھ)^۲ = فا(ا + ھ)....(۱۸)

اگر فا(لا) سے وہی تفاعل تعبیر ہو جس کا اوپر بیان ہوا تو

فاَ(ا) = ۰ اور فاَ(ا + ھ) = ۰ ....(۱۹)

اور اس لئے فاً(ا + ط۱ ھ) = ۰ ....(۲۰)

جہاں ۰ < ط۱ < ۱

نیز چونکہ فاً(لا) صفر ہے لا = ا اور لا = (ا + ط۱ ھ) کے لئے اسلئے

فاً(ا + ط۲ ھ) = ۰ ....(۲۱)

جہاں ط۱ > ط۲ > ۰

اب ضابطے (۱۷) اور (۱۸) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ

فا(ا + ھ) − فا(ا) − ھ فاَ(ا) = ج ھ^۲ ....(۲۲)

پس (۹) اور (۲۱) سے

فا(ا+ھ) = فا(ا) + ھ فاَ(ا) + ½ ھ^۲ فاً(ا + ط۲ ھ).....(۲۳)

یہ نتیجہ نہایت اہم ہے اور بعد ازاں معلوم ہوگا کہ یہ ٹیلر کے مسئلہ کی لگرانجی شکل کی خاص صورت ہے (دیکھو پندرھواں باب)۔ اس شکل میں مسئلہ کا صرف اتنا حصہ شریک ہے جسکی بالعموم حرکیاتی اور طبیعیاتی سوالات میں اکثر ضرورت پڑتی ہے۔

نتیجہ (۲۳) سے اخذ ہوتا ہے

نہا (ھ → ۰) [فا(ا + ھ) − فا(ا) − ھ فاَ(ا)] / ھ^۲ = ½ فاً(ا)...(۲۴)

۱۵۳ شکل ۴۲ میں فرض کرو کہ و ا = ا اور ا ح = ھ اور ا پ، ح ق بالترتیب ان نقاط کے معین ہیں۔ اگر ق ح نقطہ پ پر کے مماس کو ع پر ملے تو

ق ح = فا(ا + ھ)، ع ح = فا(ا) + ھ فاَ(ا)

شکل (۴۲)

پس ضابطہ (۲۴) اس بات کی صداقت کا اظہار کرتا ہے کہ انتہا میں

ق ع = ½ (ا ح)^{2} × فہ'' (ا) .... (۲۵)

پس نقطہ تماس کے قریب میں مماس سے منحنی کا ہٹاؤ عموماً دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقدار ہوتا ہے۔ اگر فہ'' (ا) ≠ ۰ تو ق ع کی علامت ھ کے ساتھ نہیں بدلتی اور ب کے عین قریب میں منحنی کا کلیتاً مماس کے اوپر یا نیچے واقع ہونا فہ'' (ا) کے مثبت یا منفی ہونے پر منحصر ہوگا۔ دیکھو دفعہ ۶۷

انحنا کے نظریہ میں ضابطوں (۱۶) اور (۲۵) کا دلچسپ استعمال ہے۔ دیکھو دسواں باب۔

۱۷۔ اجزائے تناسب کا نظریہ۔

فرض کرو کہ منحنی ما = فہ (لا) .... (۱)

اور مکافی ما = ا + ب لا + ج لا^{2} .... (۲)

نقاط لا = ا، لا = ا + ی ھ، لا = ا + ھ پر قطع کرتے ہیں جہاں ۱ > ی > ۰۔
ہم معلوم کرتے ہیں

(۱ - ی) فہ (ا) + ی فہ (ا + ھ) - فہ (ا + ھ ی) = ی (۱ - ی) ھ^{2} ج .... (۳)

اور اس لئے دفعہ سابق کے طریقہ کے مطابق

(۱-ی) فما(ا) +ی فما(ا+ھ) - فما(ا+ی ھ) = ½ی(۱-ی) ھ² فما″(ا+ طہ ھ)
(۴) ....

جہاں ا > طہ > ۰

دفعہ ۷ کے مسائل اس ضابطہ کی خاص صورتیں ہیں اور اسے یہاں اس لئے بیان کیا گیا ہے کہ اس کا متناسب اجزاء کے نظریہ سے خاص تعلق ہے۔ فرض کرو کہ تفاعل فما(لا) کی قیمتیں لا کی متعدد قیمتوں کے لئے (جو ایک دوسرے سے مساوی فرق ھ پر ہیں) جدول کی شکل میں درج کی گئی ہیں۔ فرض کرو کہ لا کی ان قیمتوں میں سے ایک قیمت ا ہے اور فما(لا) کی قیمت مطلوب ہے جبکہ لا، ا اور متصل جدولی قیمت ا + ھ کے درمیان کہیں واقع ہو مثلاً لا = ا + ی ھ جہاں ا > ی > ۰۔ اب متناسب اجزاء کے طریقے میں اور اج یہ فرض کر کے کیا جاتا ہے کہ تفاعل لا = ا سے لا = ا + ھ تک یکساں طور پر بڑھتا ہے یعنی

$$\frac{\text{فما(ا+ی ھ) - فما(ا)}}{\text{فما(ا+ھ) - فما(ا)}} = \frac{\text{ی}}{۱} \quad ....(۵)$$

یا فما(ا+ی ھ) = (۱-ی) فما(ا) +ی فما(ا+ ھ) .....(۶)

اس عمل میں یہ فرض کر لیا جائے کہ لا = ا اور لا = ا + ھ کے درمیان منحنی (۱) کی قوس کی بجائے وتر لے لینے سے قابل قدر خطا واقع نہیں ہوتی۔ ضابطہ (۴) سے اس مفروضہ کی خطا حاصل ہوتی ہے۔

دفعہ ۱۵ مثال ۲ سے ظاہر ہے کہ ی (۱-ی) کی اعظم قیمت ¼ ہے۔ پس اگر حدود لا = ا اور لا = ا + ھ کے درمیان فما″(لا) کی بڑی سے بڑی قیمت کو م سے ظاہر کریں تو ضابطہ (۴) سے ثابت ہوتا ہے کہ خطا > ⅛ ھ² م .... (۷)

مثال ا — سات اعشاریہ لوکارثمی جدول میں ۱۰۰۰۰ سے ۱۰۰۰۰۰ تک ایک ایک کے وقفہ پر تمام صحیح عددوں کے لوکارثم درج ہیں۔ اب اگر

فما(لا) = لوکہ لا ....(۸)

تو فما″(لا) = - $\frac{\text{مس}}{\text{لا}^2}$ ....(۹)

پس (۷) میں ھ = ۱ رکھنے سے معلوم ہوتا ہے کہ لوک₁ن اور لوک₁(ن+۱) کے درمیان متناسب اجزاء کے طریقہ سے ادراج کرنے میں جو خطا سرزد

ہوتی ہے وہ ۰۵۴۱۹ء۰ / ن۲ .... (۱۰)

سے بڑی نہیں ہے اس لئے اگر ن = ۱۰۰۰ تو بڑی سے بڑی خطا ۵۴۳ .... ء سے زیادہ نہیں ہے اور سات اعشاریہ تک کے جدول کے لئے یہ بالکل نظرانداز کی جا سکتی ہے۔ نیز (۴) سے ظاہر ہے کہ جب کبھی فہً (لا) کی قیمت بڑی ہو تو اس طریقہ سے صحیح نتیجہ حاصل ہونگی امید نہیں اس وقت کہا جاتا ہے کہ فرق بے قاعدہ ہیں ۔

مثال ۲ ۔ اگر فہ (لا) = لوک₁ جب لا .... (۱۱)

تو فہً (لا) = − مہ قم۲ لا .... (۱۲)

پس ھ = π / ۱۰۸۰۰ = ۲۹۱ ...ء۰ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے،

۱/۸ ھ۲ فہً (لا) = − ۴۶ .... ء × قم۲ لا .... (۱۳)

چونکہ قم۲ ۱۸° = ۴۷ء۱۰ اس لئے ظاہر ہے کہ آ کے وقفہ والے لوکارثمی جیب کے جدول میں ادراج کی خطا جبکہ زاویہ ۱۸° سے کم ہے اعشاریہ کے ساتویں مقام میں زیادہ سے زیادہ نصف اکائی کی ہو سکتی ہے ۔

امثلہ ۲۱

ذیل کے تفرقات کی تصدیق کرو ۔

(۱) ما = لا۲ (۱ − لا)۲ عف۲ ما = ۲ − ۱۲ لا + ۱۲ لا۲

(۲) ما = ۱/۲ مہ لا۲ (ل − ۱/۳ لا) عف۲ ما = مہ (ل − لا)

(۳) ما = ۱/۲۴ مہ لا (ل − لا) (ل۲ + ل لا − لا۲) عف۲ ما = ۱/۲ مہ لا (لا − ل)

(۴) ما = ۱/۴۸ مہ لا۲ (۳ ل۲ − ۴ ل لا + ۲ لا۲) عف۲ ما = ۱/۲ مہ (لا − ۱/۲ ل)۲

(۵) ما = ۱ / (لا۲ − لا − ۲) عف۲ ما = ۲/۳ { ۱/(لا − ۲)۳ − ۱/(لا + ۱)۳ }

(۶) $ا = \frac{۱}{۱+لا^۲}$ ، $عف^۴ ا = \frac{۲۴(۱-۱۰لا^۲+۵لا^۴)}{(۱+لا^۲)^۵}$

(۷) $ا = \frac{۲لا}{۱-لا^۲}$ ، $عف^۲ ا = \frac{۴لا(لا^۲+۳)}{(۱-لا^۲)^۳}$

(۸) $ا = (۱-لا)^{-م}$ ، $عف^ن ا = م(م+۱)\ldots(م+ن-۱)(۱-لا)^{-م-ن}$

(۹) $ا = \frac{۱+لا}{۱-لا}$ ، $عف^ن ا = \frac{۲\, ن!}{(۱-لا)^{ن+۱}}$

(۱۰) $ا = جب^۲ لا$ ، $عف^۲ ا = ۲ جم ۲لا$

(۱۱) $ا = جم^۲ لا$ ، $عف^ن ا = ۲^{ن-۱} جم(۲لا + \frac{ن\pi}{۲})$

(۱۲) $ا = قط لا$ ، $عف^۲ ا = ۲ قط^۳ لا - قط لا$

(۱۳) $ا = لا^۲ جب لا$ ، $عف^۲ ا = ۴لا جم لا - (لا^۲ - ۲) جب لا$

(۱۴) $ا = جب^۳ لا جم لا$ ، $عف^۳ ا = ۶ - ۶۰ جب^۲ لا + ۶۴ جب^۴ لا$

(۱۵) $ا = جب لا جبز لا$ ، $عف^۲ ا = ۲ جم لا جمز لا$

(۱۶) $ا = جم لا جمز لا$ ، $عف^۲ ا = -۲ جب لا جبز لا$

(۱۷) $ا = جب لا جمز لا$ ، $عف^۲ ا = ۲ جم لا جبز لا$

(۱۸) $ا = جم لا جبز لا$ ، $عف^۲ ا = -۲ جب لا جمز لا$

(۱۹) $ا = جب^{-۱} لا$ ، $عف^۲ ا = \frac{لا}{(۱-لا^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$

(۲۰) مس لا کے پہلے پانچ مشتقات ہیں

$۱+م^۲$ ، $۲م(۱+م^۲)$ ، $۲(۱+۳م^۲)(۱+م^۲)$ ، $۸م(۲+۳م^۲)(۱+م^۲)$ ، $۸(۲+۱۵م^۲+۱۵م^۴)(۱+م^۲)$ جہاں مس لا کو م سے ظاہر کیا گیا ہے۔

(۲۱) $ا = لا^۳ لوگ \frac{لا}{ا}$ ، $عف^۴ ا = \frac{۶}{لا}$

(۲۲) $ا = لا^۲ لوگ لا$ ، $عف^ن ا = (-۱)^{ن-۱} \frac{۲ (ن-۳)!}{لا^{ن-۲}}$

(۲۳) $ما = لا^ا فو^لا$ $عف^ن ما = (لا + ن) فو^لا$

(۲۴) $ما = لا^۲ فو^لا$ $عف^ن ما = \{لا^۲ + ۲ن لا + ن(ن-۱)\} فو^لا$

(۲۵) مساوات $لا^م \times لا^ن = لا^{م+ن}$ کو لیبنیز کے مسئلہ سے تفرق کرکے ثابت کرو کہ

$$م_ر + \frac{ر}{۱} م_{ر-۱} ن_۱ + \frac{ر(ر-۱)}{۱\times۲} م_{ر-۲} ن_۲ + \frac{ر(ر-۱)(ر-۲)}{۱\times۲\times۳} م_{ر-۳} ن_۳ + \ldots ن_ر = (م+ن)_ر$$

جبکہ $م_ر = م(م-۱)(م-۲)\ldots\ldots(م-ر+۱)$

(۲۶) $لا^{۲ن}$ کے ن ویں مشتق کو دو مختلف طریقوں سے حاصل کرکے ثابت کرو کہ

$$۱ + \frac{ن^۲}{۱^۲} + \frac{ن^۲(ن-۱)^۲}{۱^۲\times۲^۲} + \frac{ن^۲(ن-۱)^۲(ن-۲)^۲}{۱^۲\times۲^۲\times۳^۲} + \ldots\ldots = \frac{|۲ن}{(|ن)^۲}$$

(۲۷) ثابت کرو کہ $عف^ن لا^ن (۱-لا)^ن = |ن (۱-لا)^ن \left\{ ۱ - \frac{ن^۲}{۱^۲} \frac{لا}{۱-لا} + \frac{ن^۲(ن-۱)^۲}{۱^۲\times۲^۲} \frac{لا^۲}{(۱-لا)^۲} + \ldots\ldots \right\}$

(۲۸) اگر $ما = \frac{۱+لا}{۱-لا}$

تو ثابت کرو کہ $عف^ن ما^ن = \frac{|ن}{(۱-لا)^ن} \left\{ ۱ + \frac{ن^۲}{۱^۲} ما + \frac{ن^۲(ن-۱)^۲}{۱^۲\times۲^۲} ما^۲ + \ldots \right\}$

(۲۹) ثابت کرو کہ مساوات $\frac{ذ^۲ س}{ذت^۲} + ک \frac{ذس}{ذت} + ن^۲ س = ۰$ کو رشتہ

$س = ا فو^{-\frac{۱}{۲}ک ت} جم(ثت + صہ)$ مستقلات ا اور صہ کی تمام قیمتوں

کے لئے پورا کرتا ہے بشرطیکہ $ث^۲ = ن^۲ - \frac{۱}{۴} ک^۲$

(۳۰) ثابت کرو کہ مساوات $\frac{ذ^۲ س}{ذت^۲} + ۲ن \frac{ذس}{ذت} + ن^۲ س = ۰$ کو رشتہ

$س = (ا + ب ت) فو^{-ن ت}$ پورا کرتا ہے۔

(۳۱) اگر $\text{ما} = \left\{\text{لا} + \sqrt{1+\text{لا}^2}\right\}^{\text{م}}$ تو ثابت کرو کہ

$$(1+\text{لا}^2)\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^2} + \text{لا}\,\frac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}} - \text{م}^2\,\text{ما} = 0$$

(۳۲) اگر $\text{لا} = \text{فا}(\text{ت})$، $\text{ما} = \text{خا}(\text{ت})$ تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{لا}^2} = \frac{\dfrac{\text{فر}\,\text{لا}}{\text{فر}\,\text{ت}}\cdot\dfrac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{ت}^2} - \dfrac{\text{فر}\,\text{ما}}{\text{فر}\,\text{ت}}\cdot\dfrac{\text{فر}^2\,\text{لا}}{\text{فر}\,\text{ت}^2}}{\left(\dfrac{\text{فر}\,\text{لا}}{\text{فر}\,\text{ت}}\right)^3}$$

امثلہ ۲۲

(۱) ثابت کرو کہ طبیعی جیوب کی جدول میں جو آ کے وقفوں پر مرتب کی گئی ہو متناسب اجزا کی خطا ۰ ...... ۱۰۶ سے کبھی زیادہ نہیں ہوسکتی۔

(۲) ثابت کرو کہ طبیعی ماس کی جدول میں ۹۰° کے قریب کے زاویوں کے لئے متناسب اجزا کا طریقہ ناکام رہتا ہے۔ نیز دکھاؤ کہ ۴۵° کے قریب کے زاویوں کے لئے اگر ماس آ کے وقفوں پر دیے ہوئے ہوں تو خطا کی حد ۴۲۲۳ ...... ۰ ہے۔

(۳) دکھاؤ کہ لاگ کارتمی ماسوں کی جدول میں متناسب اجزا کا قاعدہ ۰° اور ۹۰° کے قریب کے زاویوں کے لئے ناکام رہتا ہے۔ نیز ثابت کرو کہ اس تفاعل کے لئے متناسب اجزا کے قاعدہ میں بڑی سے بڑی خطا ۴۵° کے قریب کے زاویوں کے لئے کم سے کم ہے۔

(۴) ثابت کرو کہ منحنی $\text{ما} = \text{لوگ}\ \text{لا}$ ہر جگہ اوپر کی طرف محدب ہے۔

(۵) ثابت کرو کہ منحنی $\text{ما} = \text{لا}\ \text{لوگ}\ \text{لا}$ ہر جگہ اوپر کی طرف مقعر ہے نیز اسکی ترسیم کھینچو۔

(۶) منحنی $\text{ما} = \text{لا}\ \text{فو}^{-\text{لا}}$ کا اعظم معین اور نقطہ انعطاف دریافت کرو۔ نیز اسکی ترسیم بھی کھینچو۔ [اعظم معین فصلہ $\text{لا} = 1$ کے جواب میں اور نقطہ انعطاف $\text{لا} = 2$ کے جواب میں ہے $\frac{2}{\text{فو}^2}$]

(۷) دکھاؤ کہ منحنی $\text{ما} = \text{فو}^{-\text{لا}^2}$ میں ایسے نقطوں پر انعطاف ہے جنکے لئے $\text{لا} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

اس کی ترسیم کھینچو۔

(۸) منحنی ما = $لا^۲$ قو $^{-لا^۲}$ کے اعظم اور اقل معین اور نقاط انعطاف دریافت کرو اور اسکی ترسیم کھینچو۔

[لا = ± $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ سے اعظم اور اقل معین حاصل ہوتے ہیں اور لا = ۰، ± $\sqrt{\frac{۳}{۲}}$ سے نقاط انعطاف]

(۹) تفاعل فا(لا) مستقل ہے اور = $\frac{۱}{۲}$(ب^۲ - ا^۲) جبکہ ۰ < لا < ا

نیز = $\frac{۱}{۲}$ ب^۲ - $\frac{۱}{۶}$ لا^۲ - $\frac{۱}{۳}$ $\frac{ا^۳}{لا}$ جبکہ ا < لا < ب

اور = $\frac{۱}{۳}$ $\frac{ب^۳ - ا^۳}{لا}$ جبکہ لا > ب

ثابت کرو کہ فا(لا)، فاَ(لا) مسلسل ہیں لیکن فاً(لا) غیر مسلسل ہے۔ منحنی ما = فا(لا) کی ترسیم کھینچو۔

(۱۰) ثابت کرو کہ ما = لا^۲(۳ - لا) میں نقطہ (۱، ۲) پر نقطہ انعطاف ہے۔ منحنی کو مرتسم کرو۔

(۱۱) ثابت کرو کہ منحنی ما = لا^۲(۱ - لا^۲) کے نقاط (± $\frac{۱}{\sqrt{۶}}$، $\frac{۵}{۳۶}$) پر انعطاف ہے۔ منحنی کو مرتسم کرو۔

(۱۲)۔ منحنی ما = $\frac{ب^۳}{ا^۲ + لا^۲}$ کے نقاط انعطاف دریافت کرو [لا = ± $\frac{ا}{\sqrt{۳}}$]

(۱۳)۔ ثابت کرو کہ منحنی ما = $\frac{ا^۲ لا}{(لا - ا)^۲}$ پر (-۲ا، - $\frac{۲}{۹}$ ا) نقطہ انعطاف ہے۔ منحنی کی ترسیم کھینچو۔

(۱۴)۔ منحنی ما = $\frac{لا^۳}{ا^۲ + لا^۲}$ کی ترسیم کھینچو اور اس کے نقاط انعطاف

دریافت کرو۔ [$لا = ۰، \pm ۱، \pm \sqrt{۳}$]

(۱۵) ثابت کرو کہ منحنی $ما = \frac{۱ - لا}{۱ + لا^۲}$ پر تین نقاط انعطاف ہیں اور وہ ایک خط میں واقع ہیں، منحنی کی ترسیم کھینچو۔

(۱۶) ثابت کرو کہ مساوات $لا^۵ - ۱۰لا^۲ + ۱۵لا - ۶ = ۰$ کی ایک تہری اصل ہے۔

(۱۷) ثابت کرو کہ مساوات $لا^۶ - ۵لا^۵ + ۵لا^۴ + ۹لا^۳ - ۱۴لا^۲ - ۴لا + ۸ = ۰$ کی ایک تہری اصل ہے، نیز تمام اصلیں دریافت کرو۔

(۱۸) منحنی $ما = ۱ - ۳لا^۲ + ۲لا^۳$ کو مرتسم کرو اور اسکے اقل اور اعظم معین اور نقاط انعطاف دریافت کرو۔

(۱۹) منحنی $ما = ۲لا^۴ - ۳لا^۳ - ۳لا^۲ + ۷لا$ کو مرتسم کرو اور اسکے نقاط انعطاف دریافت کرو۔

(۲۰) منحنی $ما = ۴لا^۳ + ۹لا^۲ + ۶لا + ۱$ کے اقل اور اعظم معین اور نقاط انعطاف دریافت کرو اور منحنی کو مرتسم کرو۔

(۲۱) ثابت کرو کہ منحنی $ما = لا^۳ + لا^۲ - لا - ۱$
اور $ما = ۲(لا^۳ - لا^۲ + لا - ۱)$ ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں اور نقطہ تماس پر عبور کرتے ہیں۔ منحنیوں کو مرتسم کرو۔

(۲۲) دریافت کرو کہ مستقلات ا، ب، ج کی کیا قیمت ہونی چاہئے کہ منحنی $ما = ا لا^۳ + ب لا^۲ + ج لا$ پر $لا = \frac{۱}{۲}$ نقطہ انعطاف ہو، $لا = ۱$ پر منحنی کا مماس لا محور کے متوازی ہو اور منحنی نقطہ (۱، ۱۴) میں سے گزرے۔

(۲۳) ثابت کرو کہ منحنی $ما = \frac{لا^۲ - لا + ۱}{لا^۲ + لا + ۱}$ پر تین حقیقی نقاط انعطاف ہیں۔

(۲۴) منحنی $ما = ۴ \text{ جب } لا - \text{جب } ۲لا$ پر موڑ کے نقطے اور نقاط انعطاف دریافت کرو اور منحنی کو مرتسم کرو۔

(۲۵) اگر منحنی $ما = فہ(لا)$ کے دو متصل معین پ ن، پ´ ن´ ہوں اور اگر

ق ح کوئی درمیانی معین موجود تر پ پَ سے و پر لے تو ثابت کرو کہ انتہا میں

$$\text{ق و} = \frac{1}{2}\ \text{ن ح} \times \text{ح نَ} \times \text{فہ}''(\text{ج})$$

جہاں ن اور نَ کے کسی درمیانی نقطہ کا فصلہ ج ہے۔

(۲۶) ثابت کرو کہ دفعہ ۵۶ کے ضابطہ فہ(ا + ھ) = فہ(ا) + ھ فہ'(ا + طہ ھ) میں طہ کی انتہائی قیمت (جبکہ ھ لا انتہا چھوٹا ہو) عموماً $\frac{1}{2}$ ہوتی ہے۔ اس نتیجہ کی ہندسی تعبیر بتاؤ۔

(۲۷) ثابت کرو کہ اقل و اعظم نقاط کی قربت میں تفاعل کی قیمت میں تغیر اکثر دوسرے رتبہ کی چھوٹی مقدار ہوتی ہے۔

(۲۸) بتاؤ کیوں کسی خاص تپش پر متلاقی کرو نو میٹر کی چال [illegible] پیدا کرنے والی معیاری تپش کی چالوں سے بقدر ایک ایسی مقدار کے مختلف ہوتی ہے جو تپش کے فرق کے مربع کے متناسب ہے۔

(۲۹) ثابت کرو کہ [illegible] کی جدول کے کسی حصے میں متناسب [illegible] درج کرنے میں بڑی سے بڑی غلطی دوسرے فرق کے آٹھویں حصہ کے مساوی ہے۔ (دوسرے فرق سے مراد مسلسل واقعوں کے فرقوں کا فرق ہے)۔

(۳۰) ایک منحنی پر تین نقطوں پ، ق، ر کے محدد بالترتیب (۰، ۳۲۵۰ و ۱۸۵۲۶)، [illegible] ہیں۔ نقطہ ق پر [illegible] اور [illegible] کی قیمتیں تقریباً دریافت کرو۔

(۳۱) دفعہ ۷۰ کے ضابطہ ۲۳ کی مدد سے لوک جم ۱ کی قیمت اعشاریہ کے چھ مقام تک دریافت کرو۔ [۱، ۹۹۹۹۳۷]

فہرست اصطلاحات

صغاری احصاء

(حصۂ اوّل)

Abscissa	فصلیہ
Absolute value	مطلق قیمت
Acceleration	اسراع
Adiabatic relation	حرناگذار رشتہ
Amplitude	سعت
Anti-logarithm	ضد لوگارتھم
Approximation	تقریب
Arc	قوس
Asymptotes	متقارب
Calculus	احصا
Catenary	زنجیرہ
Cartesian co-ordinates	کارٹیزی محدد
Chord	وتر
Circular Functions	دائری تفاعل
Circumscribed circle	بیرونی یا حائط دائرہ
Compression	پچکاؤ
Cone	مخروط

English	Urdu
Consecutive point	متصل نقطے
Continuity	تسلسل
Convergency	استدقاق
Convergent (Series)	مستدق سلسلے
Crank	کرینک
Cross-section	عمودی تراش
Curvature	انحنا
Curve	منحنی
Cylinder	اسطوانہ
Deflexion	انحراف
Density	کثافت
Dependent variable	تابع متغیر
Derived function	مشتق تفاعل
Differentiable	قابل تفرق
Differentials	تفرقے
Differentiation	تفرق
Discontinuity	عدم تسلسل
Double root	دوہری اصل
Dynamics	حرکیات
Elasticity	لچک
Elimination	اسقاط
Ellipse	قطع ناقص
Ellipsoid	ناقص نما
Exponential function	قوت نمائی تفاعل
Frustum	مخروطی حصہ مقطوع

English	Urdu
Function	تفاعل
Galvanometer	مقناطیسی برق پیما، برقی رو پیما
Geometrical progression	سلسلۂ ہندسیہ
Graph	ترسیم
Hyperbola	قطع زائد
Hyperbolic function	زائدی تفاعل
Hyperboloid	زائد نما
Image	خیال
Implicit function	تضمینی تفاعل
Inclination	میلان
Independent variable	متغیر متبوع
Infinite series	لامتناہی سلسلہ
Infinitesimal	صغاری، صغاریہ
Intercept	مقطوعہ یا مابینی حصہ
Interval	وقفہ
Intrinsic equation	ذاتی مساوات
Inverse	مقلوب
Inversion	تقلیب
Isolated points	تنہا یا اکیلے نقطے
Kinetic energy	توانائی بالحرکت
Lens	عدسہ
Limit	انتہا
Limiting values	انتہائی قیمتیں
Logarithm	لوکارثم
Logarithmic function	لوکارثمی تفاعل

Longitudinal magnification	طولی تضعیف
Lower limit	سفلی انتہا، نیچے کی حد
Magnification	تضعیف
Maximum	اعظم
Mean-value Theorem	اوسط قیمت کا مسئلہ
Mechanics	علم حیل
Multiple roots	ضعفی اصلیں
Node	عقدہ
Normal	عماد
Order	رتبہ
Ordinate	معیّن
Oscillation	اہتزاز
Parabola	قطع مکافی
Paraboloid	مکافی نما
Parallelopiped	متوازی السطوح
Parameter	مبدل
Partial	جزوی
Perimeter	گھیرا، محیط
Pendulum	رقاص
Period	دور
Permutation	ترتیب
Polar Co-ordinates	قطبی محدد
Pole	قطب
Pressure	دباؤ
Principal axes	صدری محور

Radius Victor	سمتی نیم قطر
Range	وسعت، ٹپہ
Rational	منطق
Rectilinear motion	مستقیم حرکت
Representation	تعبیر
Rigid body	استوار جسم
Rigidity	استواریت
Roots	اصلیں
Sequence	تواتر
Sphere	کرہ
Spheroid	کرہ نما
Theory	نظریہ
Trascendental	ماورائی
Trignometry	علم مثلث
Unique	یگانہ
Upper limit	علوی انتہا، اوپر کی حد
Variable	متغیر
Variation	تغیر
Vector	سمتی
Vertical	انتصابی
Zone.	منطقہ

ترقیم
(NOTATION)

Sin x	جب لا
Cos x	جم لا
tan x	مس لا
cot x	مم لا
Sec x	قط لا
Cosec x	قم لا
$\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$,	جب$^{-1}$ لا، جم$^{-1}$ لا، مس$^{-1}$ لا
$\cot^{-1}x$, $\sec^{-1}x$, $\mathrm{cosec}^{-1}x$,	مم$^{-1}$ لا، قط$^{-1}$ لا، قم$^{-1}$ لا
Sine hyperbolic (Sinh x)	زائدی جیب (جبز لا)
Sinh x, Cosh x, Tanh x,	جبز لا، جمز لا، مسز لا
Coth x, Sech x, Cosech x,	ممز لا، قطز لا، قمز لا
$\sinh^{-1}x$, $\cosh^{-1}x$, $\tanh^{-1}x$,	جبز$^{-1}$ لا، جمز$^{-1}$ لا، مسز$^{-1}$ لا
$\coth^{-1}x$, $\mathrm{sech}^{-1}x$, $\mathrm{cosech}^{-1}x$,	ممز$^{-1}$ لا، قطز$^{-1}$ لا، قمز$^{-1}$ لا
π	π
Exponent (e)	قوت نما (قو) یا صرف ' و '
e^{x}	قو$^{\text{لا}}$
a^{x}	ا$^{\text{لا}}$
$\log_e x$	لوک$_{\text{قو}}$ لا [یا صرف لوک لا]
$\log_{10} x$	لوک$_{10}$ لا
ϵ	سمہ یا صہ

∞	∞
Limit, Lt	انتہا، نہا
$\underset{x \to x_1}{\text{Lt.}} f(x) = A$	نہا ف (لا) = ا (لا ← لا۱)
differential (d)	فرق (فر)
differential coefficient $\left(\frac{dy}{dx}\right)$	تفرقی سر (فرما / فرلا)
$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^ny}{dx^n}$	فرما / فرلا ، فر۲ما / فرلا۲ ، .... فرنما / فرلان
$\delta x, \delta y, \delta z$	مفلا، مفما، مفی
dx, dy, dz	فرلا، فرما، فری
$f'(x), f''(x)$	فَ (لا)، فً (لا)، ....
Operator (D)	عامل تفرق (عف)
$Dy, D^2y, \ldots$	عف ما، عف۲ ما، .....
y', y'', y'''	مَا، مًا، مّا
Partial differential Coefficient $\frac{\partial}{\partial x}$	جزئی تفرقی سر جف / جف لا
$\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$,	جف ما / جف لا ، جف۲ ما / جف لا۲ ، جف۲ ی / جف لا جف ما ،
$f(x)$	ف (لا)،
$F(x)$,	فا (لا)،
$\phi(x)$,	فما (لا)،

اشاریہ (INDEX.)

اعداد صفحات سے متعلق ہیں